МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

АВТОМОРФИЗМЫ АФФИННЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ

ГАЙФУЛЛИН
СЕРГЕЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ

МЕХМАТ МГУ

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТКУ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
КОЩЕЕВУ АННУ ВИТАЛЬЕВНУ

Содержание

Лекция 1 **5**
Вложенное аффинное алгебраическое многообразие . . . 5
Морфизм. Изоморфизм. Автоморфизм . . . 6
Вычисление групп автоморфизмов . . . 7
Многомерный алгебраический тор . . . 9
Аффинная плоскость . . . 10
Открытые проблемы групп автоморфизмов аффинных алгебраических многообразий . . . 11

Лекция 2 **14**
Формулировка теоремы Юнга . . . 14
Дифференцирование. Локальное нильпотентное дифференцирование . . . 14
Многоугольники Ньютона . . . 16
Доказательство теоремы Юнга . . . 17

Лекция 3 **24**
Автоморфизм Нагаты . . . 24
Формулировка теоремы Шестакова-Умирбаева. Теорема Смит . . . 25
Алгебра Пуассона. Алгебра Ли . . . 26
*-редуцированная пара многочленов . . . 28
Основная техническая лемма . . . 28
Автоморфизмы от трех переменных, не понижающие степень при редукции 30

Лекция 4 **32**
Завершение доказательств прошлой лекции . . . 32
Идеи доказательства теоремы Шестакова-Умирбаева . . . 33
Группы ручных автоморфизмов, свободное произведение . . . 34
Амальгамированное произведение . . . 34
Алгебры многочленов от двух переменных есть амальгамированное произведение их подгрупп . . . 34

Лекция 5 **40**
Автоморфизм Нагаты дикий над кольцом целых чисел . . . 40
Жёсткие многообразия . . . 42
Если группа автоморфизмов алгебраическая, то либо X жёсткое, либо прямая. . . . 42
Предложение о единственном максимальном торе. . . . 45

Лекция 6 **48**
Доказательство лемм прошлой лекции. . . . 48
$\mathrm{Aut}(X)$ - конечное расширение тора. . . . 50

Лекция 7 **58**
Неприводимые изолированные полуинварианты. . . . 58
Доказательство жесткости многообразия и максимальности тора. . . . 59

Доказательство теоремы о порождении неприводимыми изолированными полуинвариантами. 62
Инвариант Макар-Лиманова алгебры $\mathbb{K}[A]$. 64
Поверхности Данилевского. 66

Лекция 8 **68**
Описание группы автоморфизмов не жесткого многообразия. 68

Лекция 9 **76**
Доказательство утверждения из лекции 8. 76
Порождающие группы $\mathrm{Aut}(X)$. 76
Обобщенная проблема сокращения. Контрпример Данилевского. 79

Лекция 10 **82**
Обобщенная проблема сокращения. Контрпример Данилевского. 82
Транзитивность. 84

Лекция 11 **89**
Торические многообразия. 89

Лекция 12 **94**
Доказательство теоремы из лекции 10. 94

Лекция 1

Вложенное аффинное алгебраическое многообразие

$\mathbb{K}$ - алгебраически замкнутое поле, $\operatorname{char}\mathbb{K} = 0$. В большинстве случаев можно считать $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Определение 1.1. *Вложенное аффинное алгебраическое многообразие - это множество нулей в полиномиальной системе*

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_k(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \subset \mathbb{K}^n = \mathbb{A}^n$$

где $f_1, \dots, f_k \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$.

Зачастую не обязательно знать местнонахождение начала координат в векторном пространстве $\mathbb{K}^n$, тогда оно рассматривается как аффинное алгебраическое многообразие и обозначается $\mathbb{A}^n$ (аффинное пространство).

Несложно показать, что если рассмотреть бесконечную полиномиальную систему, то она сойдется к некоторой конечной системе.
Каждому вложенному алгебраическому многообразию X соотвествует некоторый идеал в кольце многочленов

$$X \leftrightarrow I(X) = \{f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \mid f\big|_X = 0\}.$$

Также идеалу соответствует факторкольцо

$$I(X) \leftrightarrow \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/I(X) = \mathbb{K}[X] \text{ - алгебра регулярных функций.}$$

Получили соотвествие между вложенными алгебраическими многообразиями и алгебрами регулярных функций. При этом алгебраическим многообразиям, вложенным в разные пространства, будет соответствовать одна и та же функция.

Пример. *1. Вложение прямой $L \subseteq \mathbb{A}^1$ задается пустой системой;*
2. Вложение $L \subseteq \mathbb{A}^2$ задается одним уравнением $\{x = 0\}$ (в координатах x, y).
Убедимся, что алгебры функций будут одинаковы.

Доказательство. 1. Если в $\mathbb{A}^1$ координата t, то

$$\mathbb{K}[t] \text{ - алгебра регулярных функций.}$$

2. В случае $\mathbb{A}^2$ алгебра регулярных функций - это

$$\mathbb{K}[x, y]/(X) \cong \mathbb{K}[y],$$

где (X) - идеал, порожденный X (все функции, которые равны нулю на вертикальной прямой $x = 0$).
В обоих случаях получили кольцо многочленов от одной переменной.

□

Подобные многообразия удобно считать одинаковыми, для этого введем понятие морфизма. Будем классифицировать многообразия с точностью до изоморфизма.

Морфизм. Изоморфизм. Автоморфизм

Определение 1.2. *Пусть $X \subseteq \mathbb{A}^n$, $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ - вложенные аффинные многообразия. Тогда морфизм - это отображение*

$$\varphi \,:\, X \to Y,$$

заданное полиномами

$$(x_1, \dots, x_n) \to (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)),\ f_i \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n].$$

Можно перейти от многообразий к алгебрам функций и рассмотреть двойственный гомоморфизм к морфизму φ

$$\varphi^* : \mathbb{K}[Y] \to \mathbb{K}[X],$$

$$\varphi^*(h)(x) = h(\varphi(x)), \quad h \in \mathbb{K}[Y].$$

Определение 1.3. *φ - изоморфизм, если φ - морфизм и $\exists\ \varphi^{-1}$ - морфизм.*

Заметим, что для существования обратного отображения φ должно быть биекцией.

Пример. *Рассмотрим два вложенных аффинных многообразия*

$$X = \mathbb{A}^1, \quad Y = \{x^2 = y^3\} \subseteq \mathbb{A}^3$$

Пусть t - координата в $\mathbb{A}^1$ и

$$\varphi : t \to (t^3, t^2) = (x, y)$$

Несложно убедиться, что φ - биекция, т.к. есть обратное отображение

$$\varphi^{-1} : \begin{array}{ccc} (0,0) & \to & 0 \\ (x,y) & \to & \frac{x}{y} \end{array}$$

Однако $\frac{x}{y}$ - рациональная функция, она не является регулярной. Утверждается, что обратное отображение не является морфизмом, и многообразия не изоморфны.
Действительно, точка $(0,0) \in Y$ является особой, а у многообразия X нет особых точек.

Определение 1.4. *Автоморфизм многообразия X - это изоморфизм $\varphi : \ X \to X$.*

Теперь от вложенных алгебраических многообазий можно перейти к многообразиям, просто отождествив классы изоморфизма (изоморфные многообразия считаем одинаковыми).
Алгебры функций изоморфных многообразий также изоморфны, поскольку если

$$\varphi : \ X \to Y \text{ - изоморфизм, то}$$
$$\varphi^* : \ \mathbb{K}[Y] \to \mathbb{K}[X] \text{ - тоже изоморфизм.}$$

Более того, если есть изоморфизм алгебр регулярных функций, то это дает изоморфизм многообразий.
Таким образом, автоморфизмы X находятся в биекции с автомрфизмами алгебры регулярных функций $\mathbb{K}[X]$.
На этом основании далее мы не всегда будем различать φ и φ^*, говоря на языке многообразий или алгебр регулярных функций.

$$\mathrm{Aut}(X) \text{ - группа автоморфизмов } X \text{ (с операцией композиции).}$$
$$\mathrm{Aut}(X) \cong \mathrm{Aut}(\mathbb{K}[X]).$$

Напоминания

Пусть G - аффинное алгебраическое многообразие и G - группа. Более того, эти две структуры согласованы в следующем смысле.
Умножение - это морфизм $\mu : \ G \times G \to G, \ \ \mu(g_1, g_2) = g_1 \cdot g_2$;
Взятие обратного элемента - это морфизм $i : \ G \to G, \ i(g) = g^{-1}$.

Пример. *Типичный пример - многообразие $SL_n(\mathbb{K}) \subset \mathbb{A}^{n^2}$ с координатами $x_{11}, \ldots, x_{nn}$, задается одним полиномиальным уравнением $\det M = 1$.*
Умножение задается произведениями строк и столбцов, следовательно, в результате получим полином от $2n^2$ переменных. $\det M = 1$, поэтому обратный элемент можно вычислить с помощью транспонированных алгебраических дополнений, и также получим полином.
Поэтому $Sl_n(\mathbb{K})$ - это алгебраическая группа.

Пример. *Нас также будут интересовать аддитивная группа поля $G_a = (\mathbb{K}, +)$ и мультипликативная группа поля $G_m = (\mathbb{K} \backslash \{0\} = \mathbb{K}^\times, \cdot)$.*
G_a, очевидно, алгебраическое многообразие. Алгебра регулярных функций $\mathbb{K}[t]$.
На G_m можно ввести структуру алгебраического многообразия в $\mathbb{A}^2$ как $\{xy = 1\}$ - получим всю числовую прямую без нуля. Алгебра регулярных функций $\mathbb{K}[x, y]/(xy-1) = \mathbb{K}[x, x^{-1}]$.

Определение 1.5. *Алгебраическое действие - это отображение $G \times X \to X$, которое удовлетворяет аксиомам действия и является морфизмом.*

Вычисление групп автоморфизмов

Пример 1.1. $X = \mathbb{A}^1$, $\mathbb{K}[\mathbb{A}^1] = \mathbb{K}[t]$.

Имея в виду соответствие между многообразиями и алгебрами регулярных функций, мы должны описать группу автоморфизмов алгебры многочленов от одной переменной. Для этого нужно понять, куда может перейти образующая:

$$t \ \to \ f(t),$$

где $f(t)$ - многочлен.
При автоморфизме сохраняется неприводимость, отсюда $f(t)$ неприводим. Наше поле алгебраически замкнуто, поэтому неприводимыми в нем будут только линейные многочлены. Значит,

$$t \rightarrow at+b, \quad a \neq 0.$$

Если $t \rightarrow const$, то эта константа не сможет породить всю алгебру многочленов. Ясно, что

$$\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, \quad h(t) \rightarrow h(at+b)$$

Рассмотрим регулярные действия алгебраических групп на прямой.

1) Действие аддитивной группы $G_a \curvearrowright \mathbb{A}^1$

$$s \circ t = t + s, \;\; s \in G_a, \; t \in \mathbb{A}^1$$

Т.е. аддитивная группа действует сдвигами вдоль прямой.

2) Действие мультипликативной группы на прямой $G_a \curvearrowright \mathbb{A}^1$

$$u \circ t = u \cdot t, \;\; u \in G_m, \; t \in \mathbb{A}^1$$

Мультипликативная группа действует растяжениями.

Отображение $t \;\; \rightarrow \;\; at+b$ - это композиция растяжения и сдвига. Тогда группа автоморфизмов прямой описывется полупрямым произведением

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{A}^1) \cong G_m \leftthreetimes G_a$$

Пример 1.2. *Множество точек* $X = A_1, \ldots, A_k \;\longleftrightarrow\; S_k$ *- группа перестановок.*

Пример 1.3. $X = \mathbb{K}^{\times} = \mathbb{K}\backslash\{0\}, \quad \mathbb{K}[X] = \mathbb{K}/(xy-1) \cong \mathbb{K}[x, x^{-1}]$ *- полиномы Лорана.*

Обратимые функции в $\mathbb{K}[x, x^{-1}]$ - это $cx^k, \;\; c \neq 0$.
В с.д., если функция обратима, то она нигде не равна нулю. Любая другая фунция будет иметь вид $x^m f(x)$, где $f(x)$ - многочлен. Пусть $f(x) \neq const$ и $f(x) \neq x^l$, тогда у него над алгебраически замкнутым полем есть корень, не равный нулю и f не является обратимой.
Поскольку x - обратимая функция, то перейти он может также только в обратимую функцию

$$x \mapsto cx^k, \;\; c \neq 0$$

Тогда

$$x^{-1} \mapsto \frac{1}{c}x^{-k}$$

Отсюда

$$\mathbb{K}[x, x^{-1}] \mapsto \mathbb{K}[cx^k, \frac{1}{c}x^{-k}] \subsetneq \mathbb{K}[x, x^{-1}]$$

Если $k \neq \pm 1$, то это отображение не может быть сюръективно.
Поскольку $\varphi : \mathbb{K}[x, x^{-1}] \mapsto \mathbb{K}[x, x^{-1}]$ - изоморфизм, $k = \pm 1$.
Получили два семейства автоморфизмов

$$x \mapsto cx$$
$$x \mapsto cx^{-1}$$

Покажем, что они задаются дейтвием алгебраической группы.

1)
$$G_m \curvearrowright \mathbb{K}^\times$$
$$u \circ t = u \cdot t, \quad u \in G_m, \quad t \in \mathbb{K}^\times$$

Мультипликативная группа действует левыми сдвигами.

2) Автоморфизм $x \mapsto x^{-1}$ дает действие группы $\mathbb{Z}_2 \curvearrowright \mathbb{K}^\times$

Итак,
$$\mathrm{Aut}(\mathbb{K}^\times) \cong \mathbb{Z}_2 \leftthreetimes G_m$$

Многомерный алгебраический тор

Пример 1.4. $X = T = (\mathbb{K}^\times)^n$.

Какие алгебраические группы могут действовать на $(\mathbb{K}^\times)^n$? Она сама является алгебраической группой и может действовать сама на себе левыми сдвигами.

$$(u_1, \ldots, u_n) \circ (t_1, \ldots, t_n) = (u_1 t_1, \ldots, u_n t_n), \quad u_i, t_i \neq 0.$$

Однако это еще не все автоморфизмы. Определим, какие функции являются обратимыми.
$\mathbb{K}[T] = \mathbb{K}[x_1, x_1^{-1}, \ldots, x_n, x_n^{-1}]$.
Мономы $cx_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ имеют обратные $\frac{1}{c} x_1^{-\alpha_1} \ldots x_n^{-\alpha_n}$. Покажем, что других нет. Идея такая же как и в одномерном случае: все остальные функции имеют вид $x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} f(x_1, \ldots, x_n)$ и т.д.

Введем обозначения
$$x_1 \mapsto c_1 x_1^{m_{11}} \ldots x_n^{m_{1n}}$$
$$\ldots$$
$$x_n \mapsto c_n x_1^{m_{n1}} \ldots x_n^{m_{nn}}$$

Тогда этому отображению соответствует матрица

$$M(\varphi) = \begin{pmatrix} m_{11} & \ldots & m_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \ldots & m_{nn} \end{pmatrix} \text{— целочисленная, обратимая (обратная тоже целочисленная)}$$

Прямым вычислением можно убедиться в том, что

$$M(\phi \circ \psi) = M(\phi) \cdot M(\psi)$$

$$E = M(\mathrm{id}) = M(\phi \circ \phi^{-1}) = M(\phi) \cdot M(\phi^{-1})$$

Получили, что $M \in GL_n(\mathbb{Z}) = \{Mat_{n\times n}M \mid \det M = \pm 1\}$.
Подгруппа, изоморфная $GL_n(\mathbb{Z})$

$$GL_n(\mathbb{Z}) \cong \left\{ \begin{array}{ccc} x_1 & \mapsto & x_1^{m_{11}} \dots x_n^{m_{1n}} \\ & \dots & \\ x_n & \mapsto & x_1^{m_{n1}} \dots x_n^{m_{nn}} \end{array} \right\}$$

Итак,

$$\mathrm{Aut}(T) \cong GL_n(\mathbb{Z}) \leftthreetimes T$$

Эта группа автоморфизмов уже не является агебраической. У алгебраической группы может быть только конечное количество компонент связности. Группа $GL_n(\mathbb{Z})$ - бесконечная дискретная группа, и в ней бесконечное количество компонент связности.

Аффинная плоскость

Пример 1.5. $X = \mathbb{A}^2, \quad \mathbb{K}[X] = \mathbb{K}[x, y]$.

Автоморфизм задается следующим образом

$$\varphi \begin{cases} x \mapsto f(x, y) \\ y \mapsto g(x, y) \end{cases}$$

Вопрос: для какой пары f, g φ является автоморфизмом? Это можно проверить для конкретных f и g, но общий критерий не доказан.
Покажем, что $\mathrm{Aut}(\mathbb{A}^2)$ не может быть алгебраической группой.
Пусть

$$\varphi : \begin{cases} x \mapsto x + h(y) \\ y \mapsto y \end{cases}, \ h - \text{многочлен}$$

Это треугольный автоморфизм, обратный к нему

$$\varphi^{-1} : \begin{cases} x \mapsto x - h(y) \\ y \mapsto y \end{cases}$$

Группа треугольных автоморфизмов

$$L = \left\{ \begin{array}{c} x \mapsto x + h(y) \\ y \mapsto y \end{array} \right\} \cong (\mathbb{K}[y], +)$$

Это бесконечномерное векторное пространство, и оно не помещается в конечномерную алгебраическую группу.

Пусть теперь

$$\left\{\varphi:\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto C\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\ \ C\in GL_n(\mathbb{K})\right\}=H$$

Вопрос: верно ли, что H и L порождают $\mathrm{Aut}(X)$? Да, однако этот ответ специфичен для $\mathbb{A}^2$ и в трехмерной плоскости утверждение уже не верно.

Пример неалгебраического автоморфизма

Пусть $G \curvearrowright X$, тогда $G \curvearrowright \mathbb{K}[X]$.
Но не любому действию группы на алгебре регулярных функций соответствует действие на многообразии. Это верно только для локально конечных действий: $\forall f \in \mathbb{K}[X]\ \ \exists V \subseteq \mathbb{K}[X]$ - конечномерное G - инвариантное подпространство, такое что $f \in V$.
Пусть

$$\varphi:\ \begin{cases}x\mapsto x+y^2\\ y\mapsto y+x^2+2xy^2+y^4\end{cases}$$

Это не алгебраический автоморфизм. В с.д., рассмотрим

$$\varphi,\ \varphi^2,\ \varphi^3\ \dots$$

и проследим за максимальной степенью вхождения y в $\varphi^k(x)$ и $\varphi^k(y)$

$$\varphi^k(x)=y^{4^{k-1}\cdot 2}+\dots$$

$$\varphi^k(y)=y^{4^k}+\dots$$

Видно, что при многократном применении $\varphi^k(y)$ степень вхождения y растет. Если бы φ был алгебраическим автоморфизмом, то должен был быть элементом некоторого конечномерного пространства V, инвариантного относительно алгебраической группы.
В частности, V должно быть инвариантно относительно всех степеней φ, что влечет ограниченность степеней y. Противоречие.

Открытые проблемы групп автоморфизмов аффинных алгебраических многообразий

1. Проблема Якобиана

Пусть $\varphi:\ \mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]\mapsto\mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]$

$$\varphi:\ \begin{cases}x_1\mapsto f_1(x_1,\dots,x_n)\\ \vdots\\ x_n\mapsto f_n(x_1,\dots,x_n)\end{cases}\qquad J(\varphi)=\begin{vmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{vmatrix}$$

Несложно видеть, что $J(\varphi\circ\psi)=J(\varphi)\cdot J(\psi)$, отсюда, если φ - изоморфизм,

$$J(\varphi)\cdot J(\varphi^{-1})=1.$$

Но $J(\varphi)$ и $J(\varphi^{-1})$ - это многочлены, откуда $J(\varphi) = const \neq 0$.
В обратную сторону - гипотеза:
Если $J(\varphi) = const \neq 0$, то φ - автоморфизм.

2. Проблема диких и ручных автоморфизмов

Пусть $\varphi: \ \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] \mapsto \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ и

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto C \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\} \quad L = \left\{ \begin{matrix} x_1 \mapsto x_1 + f(x_2, \ldots, x_n) \\ x_2 \mapsto x_2 \\ \vdots \\ x_n \mapsto x_n \end{matrix} \right\}$$

Определение 1.6. *Автоморфизм φ - элементарный, если $\varphi \in H$ или $\varphi \in L$.*

Определение 1.7. *φ - ручной, если φ - композиция элементарных;
φ - дикий, если φ не ручной.*

Вопрос: существуют ли дикие автоморфизмы?

Тероема Юнга, 1942: при $n = 2$ диких автоморфизмов нет.

Теорема Шестакова-Умирбаева, 2004: при $n = 3$ дикие автоморфизмы есть.

При $n \geq 4$ вопрос открыт.

3. Проблема линеаризации торов

Пусть $T = (\mathbb{K}^{\times})^m \curvearrowright \mathbb{A}^n$.

Вопрос: существует ли такой $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathbb{A}^n)$, что $\alpha T \alpha^{-1}$ - линейный тор?

Если $m = n$ или $m = n - 1$, то ответ "да" . (Белиницкий-Бируля, 1966)

В случае $\mathbb{K}^{\times} \curvearrowright \mathbb{K}^3$ ответ также "да" . (Корас-Рассел, 1997)

К проблеме линеаризации контрпримеров не известно.

Существует более простая формулировка:
Верно ли, что у любого действия тора есть неподвижная точка?
Эта проблема также остается открытой.

4. Проблема сокращения

Пусть $X \times \mathbb{A}^1 \cong \mathbb{A}^{n+1}$. Верно ли, что отсюда следует, что $X \cong \mathbb{A}^n$?

В общем случае ответа нет.
Для кривых и двумерных поверхностей ответ "да" .

5. Обобщенная проблема сокращения

Пусть $X \times \mathbb{A}^1 \cong Y \times \mathbb{A}^1$. Следует ли отсюда, что $X \cong Y$?
Эта проблема решена: ответ - "нет" .
Существует контрпример, который мы рассмотрим позже (Многообразия Данилевского).

Лекция 2

Формулировка теоремы Юнга

Теорема 2.1. *(Юнг, 1942)*
При $n = 2$ все автоморфизмы

$$\varphi : \mathbb{K}[x, y] \mapsto \mathbb{K}[x, y]$$

ручные.

Дифференцирование. Локальное нильпотентное дифференцирование

Определение 2.8. *Пусть A - коммутативная алгебра. Отображение $\delta : A \mapsto A$ называется дифференцированием, если*
1. δ - линейный оператор;
2. выполнено тождество Лейбница $\delta(ab) = a\delta(b) + \delta(a)b$.

Определение 2.9. *δ называется локально нильпотентным дифференцированием (LND), если $\forall a \in A\ \exists n : \delta^n(a) = 0$.*

Построим по каждому LND дифференцированию его экспоненту, которая будет автоморфизмом

$$\exp \delta = \mathrm{id} + \delta + \frac{\delta^2}{2!} + \ldots + \frac{\delta^k}{k!} + \ldots$$

Вообще говоря, это бесконечная сумма, но при применении к каждому конкретному элементу получим корректно определенную конечную сумму.

Упражнение 2.1. *Пусть δ - LND, тогда $\exp \delta$ - автоморфизм алгебр.*

По одному LND можно построить целую погруппу автоморфизмов

$$\{\exp(t\delta) \mid t \in \mathbb{K}\} \cong G_a \cong (\mathbb{K}, +)$$

Это очевидный факт, т.к. $\exp(t_1)\delta \exp(t_2\delta) = \exp(t_1 + t_2)\delta$.

Уверждение 2.1. *Пусть $A = \mathbb{K}[X]$.*
Все алгебраические $\mathbb{G}_a$-подгруппы имеют вид

$$\{\exp(t\delta) \mid t \in \mathbb{K}\}.$$

Доказательство. Пусть $\mathbb{G}_a \hookrightarrow \mathrm{Aut}(X)$ ($\mathbb{G}_a$ - подгруппа).
Действие группы - это отображение (морфизм)

$$\alpha : X \times \mathbb{A}_1 \mapsto X$$

$$\alpha^* : \mathbb{K}[X] \mapsto \mathbb{K}[x][t]$$

$$\alpha^*(f) = f_0 + f_1 t + \ldots + f_n t^n, \quad f_i \in \mathbb{K}[X]$$

При каждом фиксированном t α^* - автоморфизм, соответственно

$$\alpha^*(fg)(t) = \alpha^*(f)(t)\alpha^*(g)(t) \tag{2.1}$$

$$\alpha^*(f)(0) = f_0$$

По определению, $\delta(f) := f_1 = \left.\dfrac{\partial\alpha^*(t)}{\partial t}\right|_{t=0}$.

$$\alpha^*(f)(t)\alpha^*(g)(t) = (f + f_1 t + \ldots)(g + g_1 t + \ldots) \tag{2.2}$$

При этом $f_1 t = \delta(f)t, \ \ g_1 t = \delta(g)t$.

$$\alpha^*(fg)(t) = fg + \delta(fg) + \ldots \tag{2.3}$$

Из $(2.1), (2.2), (2.3)$, приравнивая коэффициенты при t в $(2.2), (2.3)$, получаем тождество Лейбница

$$\delta(fg) = f\delta(g) + \delta(f)g$$

Поскольку α^* - действие,

$$\alpha^*(f)(t_1 + t_2) = \alpha^*(\alpha^*(f)(t_1))(t_2), \tag{2.4}$$

где t_1, t_2 - фиксированные. В с.д.,

$$\alpha^*(f)(t_1 + t_2) = f + f_1(t_1 + t_2) + f_2(t_1 + t_2)^2 + \ldots =$$

$$= f + f_1(t_1 + t_2) + f_2 t_1^2 + f_2 t_2^2 + 2 f_2 t_1 t_2 + \ldots \tag{2.5}$$

С другой стороны,

$$\alpha^*(\alpha^*(f)(t_1))(t_2) = \alpha^*(f + \delta(f)t_1 + f_2 t_1^2 + \ldots)(t_2) =$$

$$= f + \delta(f)t_1 + f_2 t_1^2 + \ldots + (\delta(f) + \delta^2(f)t_1 + \ldots)t_2 + (f_2 + \ldots)t_2^2 + \ldots \tag{2.6}$$

Сравнивая коэффициенты при степенях t_1, t_2 в $(2.5), (2.6)$, получаем (2.4). $\square$

Опишем степенную функцию, соответствующую LND.

$$\forall a \neq 0 \ \exists\, n : \ \delta^n(a) = 0$$

Пусть n минимально, тогда, считая, что $\delta^0(a) = \mathrm{id}$

$$\deg_\delta(a) = n - 1 \ \text{ или нулевой степени}$$

Увеждение 2.2. $\deg_\delta$ - *степенная функция, т.е.*

$$\deg_\delta(f + g) \leq \max(\deg_\delta f + \deg_\delta g)$$

$$\deg_\delta(fg) = \deg_\delta f + \deg_\delta g$$

Доказательство. Первое свойство очевидно.
Второе свойство следует из тождества Лейбница

$$\delta^k(fg) = \sum_{i=0}^{k} C\delta^i(f)\delta^{k-i}(g)$$

Тогда при $k = \deg_\delta f + \deg_\delta g$ от суммы останется только один ненулевой член Cfg. □

Увержение 2.3. $\ker\delta$ - *факториально замкнуто, т.е.*

$$fg \in \ker\delta \ \Rightarrow\ f \in \ker\delta,\ g \in \ker\delta$$

Доказательство. Следует из того, что $fg \in \ker\delta \ \Rightarrow\ \deg_\delta(fg) = 0$. □

Пусть алгебра A G-градуирована.
Это значит, что есть абелева группа G ($G = \mathbb{Z}^n$), такая что

$$A = \bigoplus_{g\in G} A_g, \quad A_gA_h \subseteq A_{g+h},$$

A_g - подпространства.

Определение 2.10. *δ - LND называется однородным степени $e \in G$, если $\forall f \in A_g$ выполнено $\delta(f) \in A_{g+e}$.*

С этого момента A - $\mathbb{Z}$-градуированная алгебра

Пусть δ - LND и $\delta = \sum\limits_{j=l}^{k} \delta_j$, где δ_j - дифференцирование степени j.
Если алгебра A - конечно порожденная, то можно показать, что δ всегда раскладывается в конечную сумму однородных. При этом каждое слагемое не обязано быть локально нильпотентным.

Лемма 2.1. *δ_l и δ_k - LND.*

Доказательство. Пусть $f \in A_i$ ($i \in \mathbb{Z}$).
Пусть $\delta_k^n(f) \neq 0$, тогда это старший член $\delta^n(f)$, и тогда $\delta^n(f) \neq 0$.
В с.д.,

$$\delta^n(f) = \delta(\ldots\delta(f)\ldots) = \sum \delta_j(\ldots \sum \delta_j(f)\ldots) = \sum \delta_{j_1}(\delta_{j_2}\ldots\delta_{j_n}(f)\ldots)$$

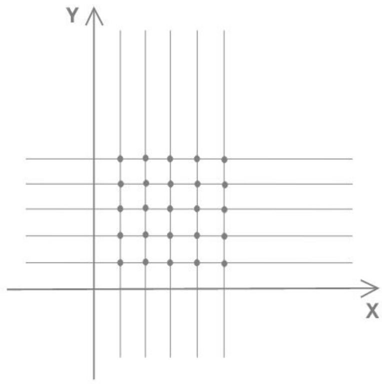
Если теперь мы хотя бы в одном месте выберем $j_i < k$, то попадем в компоненту стого младше $\delta_k^n(f)$. Поэтому член $\delta_k^n(f)$ (если он не равен нулю) ни с чем не может сократиться.

$$\delta_k^n(f) = 0 \ \Leftrightarrow\ \delta^n(f) = 0$$

С младшим членом рассуждения аналогичны. □

Многоугольники Ньютона

Введем систему координат на плоскости (в общем случае в многомерном пространстве).



Сопоставим целым точкам (тем, у которых обе координаты целые) мономы

$$x^a y^b \ \to \ (a, b)$$

Тогда многочлену $f(x, y)$ можно сопоставить многоугольник (Ньютона) $N(f)$ - выпуклую оболочку всех мономов, которые входят в f с ненулевыми коэффициентами

$$\sum_i c_i x^{\alpha_i} y^{\beta_i} = f \ \to \ N(f) = \mathrm{conv}((\alpha_i, \beta_i), (0, 0))$$

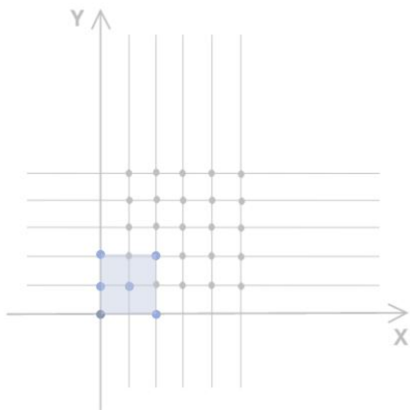
Пример

$$f(x, y) = 2x^2 + 3xy + y + 5x^2y^2 + 7y^2$$

Точки, соответствующие мономам:

$$(2, 0) \ \ (1, 1) \ \ (0, 1) \ \ (2, 2) \ \ (0, 2)$$

Их выпуклая оболочка - квадрат.



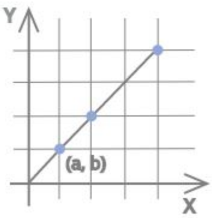
Доказательство теоремы Юнга

Доказательство. Возьмем любой автоморфизм и докажем, что он ручной. Пусть

$$\varphi : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix}$$

Индукция по площади многоугольника Ньютона $S(N(f))$.
Для того, чтобы проводить такое рассуждение, нужно показать, что площадь не может изменяться непрерывно, а только дискретно. Существует формула, позволяющая вычислить площадь по количеству точек на границе оболочки и внутри нее, из которой следует, что площадь не всегда целая, но всегда полуцелая.
Задача: доказать это.

База индукции. $S(N(f)) = 0$. Это значит, что $N(f)$ является отрезком.
Обозначим через (a, b) минимальную целую точку отрезка.
Тогда



$$f(x, y) = h(x^a y^b) = \prod (x^a y^b - \lambda_i)$$

Разложение на линейные множители следует из алгебраической замкнутости поля. Но многочлен f должен быть неприводимым (как образ x при автоморфизме), следовательно, единственный возможный вариант - произведение, состоящее только из одного множителя.

$$f(x, y) = Cx^a y^b + \lambda$$

Воспользуемся теперь теоремой об якобиане автоморфизма. Для простоты считаем $C = 1$.

$$J(f,g) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ax^{a-1}y^b & bx^a y^{b-1} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} = x^{a-1}y^{b-1}(ay\frac{\partial g}{\partial y} - bx\frac{\partial g}{\partial x}) \tag{2.7}$$

1) Если $a > 1$ или $b > 1$, то (2.7) делится либо на x, либо на y, но это должна быть константа.
   Т.о. $a \leq 1,\ b \leq 1$.
   Если $a = 0$, то $f(x, y) = y + c$.

$$J(f,g) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} = -\frac{\partial g}{\partial x}$$

   Тогда $g(x, y) = dx + F(y)$.
   Видно, что вместе с $f(x, y) = y + c$ это композиция двух элементарных автоморфизмов.

2) Если $b = 0$, то получается аналогичный случай.

3) Пусть $a = 1,\ b = 1$. Тогда $f = xy + c$.

$$J(f,g) = \begin{vmatrix} y & x \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix}$$

$J(0,0) = 0$, что не соответствует $J(f,g) = const$.

Шаг индукции. Определим $\delta_f : \mathbb{K}[x,y] \mapsto \mathbb{K}[x,y]$ по следующему правилу

$$\delta_f(h) = J(f,h) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Лемма 2.2. *δ_f - LND.*

Доказательство. То, что это дифференцирование, следует из

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x}$$

т.к. линейная комбинация дифференцирований - это дифференцирование.

Для доказательства локальной нильпотентности воспользуемся свойством матрицы Якоби при композиции отображений, учитывая, что f и g - образы x и y при автоморфизме

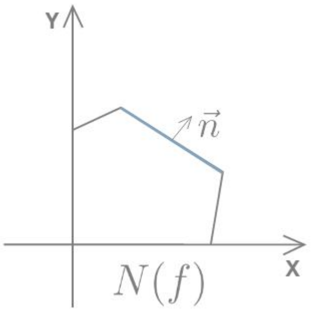
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial f} & \frac{\partial f}{\partial g} \\ \frac{\partial h}{\partial f} & \frac{\partial h}{\partial g} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Отсюда

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial f} & \frac{\partial f}{\partial g} \\ \frac{\partial h}{\partial f} & \frac{\partial h}{\partial g} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial h}{\partial f} & \frac{\partial h}{\partial g} \end{vmatrix} c(\neq 0) = c\frac{\partial h}{\partial g}$$

Это LND, т.к. оно уменьшает степень при второй переменной. □

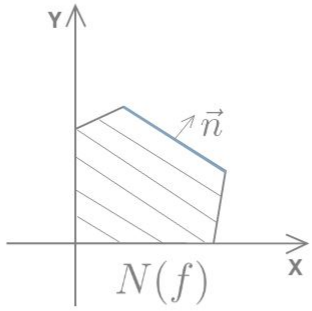
Рассмотрим теперь многогранник Ньютона. Варианты, когда он полностью лежит на оси x или на оси y, укладываются в базу индукции. Значит, у него есть сторона, не лежащая ни в одной, ни в другой оси.



Пусть $\vec{n}$ - примитивная внешняя нормаль к этой стороне. Введем градуировку на алгебре многочленов от двух переменных

$$\mathbb{K}[x,y] = \bigoplus \mathbb{K}[x,y]_i,$$

где $\mathbb{K}[x,y]_i := \langle x^a y^b \mid ((a,b),\vec{n}) = i\rangle$.
По сути, это разбиение на слои, параллельные данной стороне. Мономы, которые попали в первый слой, будут давать первое слагаемое, попавшие во второй слой - второе, и т.д.



Тогда $f = \sum\limits_{j=0}^{m} f_i$. Выберем старший член $\hat{f} = f_m$.

$$\delta_f(\cdot) = \sum_{j=0}^{m} \delta_{f_j}$$

$$\deg \delta_{f_j} = \deg f_j - \deg x - \deg y,$$

т.к.

$$\delta_{f_j} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_j}{\partial x} & \frac{\partial f_j}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Таким образом, $\delta_{\hat{f}}$ - крайняя однородная компонента. Тогда по Лемме 2.2 $\delta_{\hat{f}}$ - это LND.

Теперь рассмотрим следующие варианты.

1) Выбранная сторона не доходит до пересечения с осью Ox.
Это значит, что $\hat{f}$ делится на y.

$$\delta_{\hat{f}}(\hat{f}) = J(\hat{f},\hat{f}) = 0$$

$$\hat{f} \in \ker \delta_{\hat{f}}$$

Поскольку ядро факториально замнкуто, получаем, что $y \in \ker \delta_{\hat{f}}$.

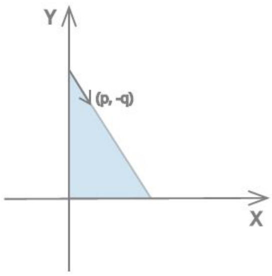
Далее используем следующий факт (пока без доказательства):
степень трансцендентности ядра LND на 1 меньше, чем степень трансцендентности исходной алгебры. В нашем случае степень трансцендентности алгебры многочленов от двух переменных равна 2, поэтому

$$\deg tr \ker \delta_{\hat{f}} = 1$$

Отсюда легко показать, что $\ker \delta_{\hat{f}}$ - это алгебра многочленов от одной переменной. Т.о. все элементы $\ker \delta_{\hat{f}}$ должны зависеть от y.
Итак, единственный подходящий вариант - $\hat{f} = cy^k$.

2) Ситуация аналогична, если $\hat{f}$ делится на x: $\hat{f} = dx^l$.

3) Выбраная сторона доходит до пересечения с обеими осями. Тогда многоугольник Ньютона принимает вид треугольника.
Пусть примитивный направляющий вектор имеет координаты $(p, -q)$.



Тогда

$$\hat{f} = c\prod(x^p - \lambda_i y^q) \tag{2.8}$$

В с.д., $\hat{f}$ можно представить в виде

$$\hat{f} = y^N F(x^p y^{-q})$$

где многочлен от одной переменной раскладывается на линейные множители, откуда получим (2.8).

$\hat{f} \in \ker \delta_{\hat{f}} \Rightarrow$ каждый множитель $x^p - \lambda_i y^q \in \ker \delta_{\hat{f}}$.
Если существуют два различных λ_i, то

$$x^p - \lambda_1 y^q - (x^p - \lambda_2 y^q) = (\lambda_2 - \lambda_1) y^q \in \ker \delta_{\hat{f}}.$$

Получается, с одной стороны, в ядре лежит нетривиальная разность $x^p - \lambda_i y^q$, а с другой $(\lambda_2 - \lambda_1) y^q \in \ker \delta_{\hat{f}}$ - это уже два алгебраические независимых элемента. Ранее мы установили, что степень трансцендентности ядра равна 1, противоречие.
Итак, λ_i не могут быть различными.
В итоге $\hat{f} = c(x^p - \lambda y^q)^\gamma$.

Покажем, что случаи 1) и 2) невозможны.
$\hat{f}$ должна соответствовать стороне многоугольника, а в случаях 1),2) она соответствует вершине. Если многоугольник не лежит на какой-то оси целиком, всегда можно добиться, чтобы какая-то сторона содержала не только вершину, но и некоторый наклонный отрезок, т.е. $\hat{f}$ должна зависеть от двух переменных.
Т.о. остается только вариант 3).

$$\delta_{\hat{f}}(h) = J(c(x^p - \lambda y^q)^\gamma, h) = c\gamma(x^p - \lambda y^q)^{\gamma-1}J(x^p - \lambda y^q, h)$$

Рассмотрим дифференцирование

$$\zeta(h) = J(x^p - \lambda y^q, h)$$

Понятно, что если $\delta_{\hat{f}}$ было LND, то ζ - тоже LND, т.к. они пропорциональны с коэффициентом, лежащим в ядре.

$$\zeta(x) = \begin{vmatrix} px^{p-1} & -\lambda q y^{q-1} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \lambda q y^{q-1}$$

$$\zeta(y) = px^{p-1}$$

Получили, что $\zeta(x)$ делится на y и $\zeta(y)$ делится на x, если $p \neq 1,\ q \neq 1$.
Однако таких p и q быть не может.
Степенная функция $\deg_\zeta$ при дифференцировании, по определению, уменьшается на 1.
То, что $\zeta(x)$ делится на y означает, что $\deg_\zeta(y) \leq \deg_\zeta(x) = \deg x - 1$.
Аналогично, $\deg_\zeta(x) \leq \deg_\zeta(y) = \deg y - 1$. Но это невозможно.

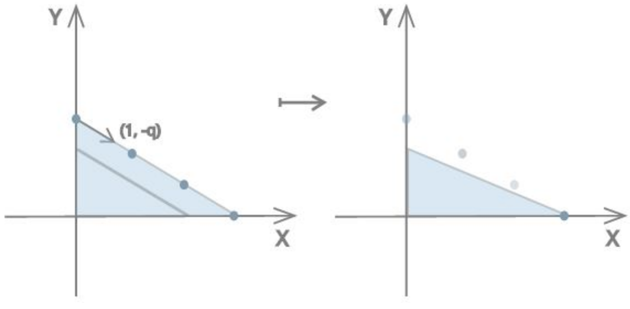
Значит, $p = 1$ или $q = 1$ и

$$\hat{f} = c(x - \lambda y^q)^m$$

Рассмотрим теперь элементарный автоморфизм

$$\psi : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + \lambda y^q \\ y \end{pmatrix}$$

и композицию $\psi \circ \varphi$. Тогда из всех точек на выбранной стороне останется только вершина на Ox, т.е. $\hat{f} \mapsto x^m$.



"Вылезти" за пределы треугольника ничего не может, т.к. дополнительный автоморфизм действует вдоль линий, параллельных наклонной стороне и не меняет градуировку.
Получили, что $N(f)$ строго уменьшился. При этом мы сделали композицию с элементарным автоморфизмом.
Значит, эта композиция ручная тогда и только тогда, когда φ ручной.
Это завершает доказательство. $\square$

Лекция 3

В этой лекции речь пойдет о теореме Шестакова-Умирбаева, которая решает задачу диких и ручных автоморфизмов в случае $n = 3$.
Элементарными автоморфизмами кольца многочленов от n переменных $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ назовем следующие отображения

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_i + f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

где f - многочлен.
Раньше мы разделяли элементарные автоморфизмы на линейные и автоморфизмы вида (3.1) с $i = 1,\ \alpha = 1$. Очевидно, композиции старых автоморфизмов и композиции автоморфизмов вида (3.1) совпадают.
Напомним, что ручные автоморфизмы - это композиции элементарных.
Вопрос: все ли автоморфизмы являются ручными или есть дикие (в случае $n = 3$)?

Автоморфизм Нагаты

Автоморфизм Нагаты (1972) выглядит следующим образом

$$\varphi : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + (x^2 - yz)z \\ y + 2x(x^2 - yz) + (x^2 - yz)^2 zz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \sigma z \\ y + 2x\sigma + \sigma^2 zz \end{pmatrix},$$

где $\sigma := x^2 - yz$.
Заметим, что σ - инваринт при данном эндоморфизме φ, т.е.

$$\sigma(\varphi(x), \varphi(y), \varphi(z)) = \sigma(x, y, z)$$

Убедимся теперь, что φ - автоморфизм, выписав обратный к нему

$$\varphi^{-1} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - \sigma z \\ y - 2x\sigma + \sigma^2 z \\ z \end{pmatrix}$$

Показать, что φ - автоморфизм, можно и более простым способом.
А именно, автоморфизм Нагаты является экспонентой от следующего LND

$$\partial : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sigma z \\ 2x\sigma \\ 0 \end{pmatrix}$$

Легко видеть, что

$$\partial(\sigma) = 2x\partial(x) - z\partial(y) = 0$$

Отсюда ∂ - LND.

Формулировка теоремы Шестакова-Умирбаева. Теорема Смит

Теорема 3.2. *(Шестакова-Умирбаева, 2004)*
Автоморфизм Нагаты дикий.

Хотелось бы обобщить этот результат на $n \geq 4$, добавив к автоморфизму Нагаты неподвижные переменные. Однако следующая теорема показывает, что теорема Шестакова-Умирбаева не решает задачу диких и ручных автоморфизмов в случае $n \geq 4$.

Теорема 3.3. *(Смит, 1989)*
Автоморфизм Нагаты стабильно ручной.

Это значит, что при добавлении неподвижной переменной автоморфизм становится ручным.

Доказательство. Попробуем разложить на ручные следующий автоморфизм

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \varphi(y) \\ \varphi(z) \\ w \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

Идея в том, чтобы использовать w как некое хранилище информации

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w+\sigma \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y+2x(w+\sigma)+(w+\sigma)^2 z \\ z \\ w+\sigma \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} x+(w+\sigma)z \\ y+2x(w+\sigma)+(w+\sigma)^2 z \\ z \\ w+\sigma \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \\ \hat{w} \end{pmatrix}$$

Заметим теперь, что $\hat{x}^2 - \hat{y}\hat{z} = \sigma$. Значит, можно из последней координаты вычесть σ и продолжить цепочку автоморфизмов

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \\ \hat{w} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+(w+\sigma)z \\ y+2x(w+\sigma)+(w+\sigma)^2 z \\ z \\ w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+\sigma z \\ y+2x(w+\sigma)+(w+\sigma)^2 z \\ z \\ w \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x+\sigma z \\ y+2x\sigma+\sigma^2 z+2w(x+\sigma z)+w^2 z \\ z \\ w \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} x+\sigma z \\ y+2x\sigma+\sigma^2 z \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

Получили разложение (3.2). □

Следующие две проблемы остаются открытыми:

1) Существуют ли дикие автоморфизмы при $n \geq 4$?

2) Существуют ли стабильные дикие автоморфизмы?

Алгебра Пуассона. Алгебра Ли

Определение 3.11. **B** - *алгебра Пуассона, если* **B** - *векторное пространство с двумя билинейными операциями:*
1) умножение $(x, y) \mapsto xy$,
2) $(x, y) \mapsto [x, y]$ *- скобка Пуассона,*
такими что с умножением это коммутативная ассоциативная алгебра, а с $[,]$ *это алгебра Ли,*
и выполнено тождество Лейбница

$$[xy, z] = x[y, z] + y[x, z].$$

Определение 3.12. *Алгебра Ли - векторное поле с билинейной операцией* $[,]$ *(коммутатор), такой что*

$$[x, y] = -[y, x], \tag{3.3}$$

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0. \tag{3.4}$$

Пусть L - алгебра Ли с базисом $l_1, l_2, \dots, l_k, \dots$.
$P(L)$ - алгебра Пуассона, состоящая из многочленов от $l_1, \dots, l_k, \dots$.
Убедимся, что, действительно, можно ввести две опреации так, чтобы получилась алгебра Пуассона.

$$f(l_1, \dots, l_k, \dots) \cdot g(l_1, \dots, l_k, \dots) -$$

обычное умножение.

Известны скобка $[l_i, l_j]$ из алгебры Ли и тождество Лейбница из определения. Тогда скобка Пуассона на мономах задана однозначно, и ее можно по линейности продолжить на многочлены.

Пусть $x_1, \dots, x_n$ - переменные (набор букв). Рассмотрим от них кратные формальные коммутаторы.
Так, например, $\sum \lambda_i [[x_2, x_1], x_3]]$ - некоторое слово от x_i.
Свободная алгебра Ли - это алгебра Ли, порожденная такими словами, в которой выполнены (3.3), (3.4).

Итак, по $x_1, \ldots, x_n$ строим свободную алгебру Ли $L(x_1, \ldots, x_n)$, а по этой алгебре - алгебру Пуассона $P(L(x_1, \ldots, x_n))$. Кроме того, $\mathbf{A} = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] \subset P(L(x_1, \ldots, x_n))$ - подалгебра Ли.

Сделаем теперь градуировку на алгебре Ли. Пусть

$$\underbrace{x_1, \ldots, x_n}_{\deg 1}, \ \underbrace{[x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]}_{\deg 2}, \ \ldots$$

Соотношения (3.3), (3.4) приравнивают два слова с одинаковой степенью, поэтому градуировка сохраняется.

Далее градуировку можно продолжить на алгебру Пуассона. Будем приписывать словам степени по количеству x_i, входящих в них. Так, например,

$$x_1[x_2, x_3] \to \deg 3$$

Легко видеть, что такая градуировка определена корректно:
$P(L(x_1, \ldots, x_n)) = \bigoplus\limits_{i \geq 0} V_i$, где V_i - однородные компоненты степени i.

$$V_i \cdot V_j \subseteq V_{i+j}$$

$$[V_i, V_j] \subseteq V_{i+j}$$

Идея в том, чтобы относиться к обычным многочленам (в нашем случае от 3 переменных)как к элементам Пуассоновской алгебры.

Сопоставим элементу алгебры Пуассона его старший член (разложим на однородные компоненты и выберем только старшую из них)

$$f \in P(L(x_1, \ldots, x_n)) \mapsto \overline{f}$$

Нетрудно проверить, что

$$\overline{f \cdot g} = \overline{f} \cdot \overline{g},$$

$$\deg fg = \deg f + \deg g,$$

Здесь степень f - это максимальная степень его однородных компонент,

$$\deg[f, g] \leq \deg f + \deg g$$

Последнее следует из того, что старший член может сократиться в силу свойств скобки.

Если $f, g \in \mathbf{A}$, то

$$[f, g] = \sum_{1 \leq i, j \leq n} [x_i, x_j] \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_i} & \frac{\partial f}{\partial x_j} \\ \frac{\partial g}{\partial x_i} & \frac{\partial g}{\partial x_j} \end{vmatrix},$$

что получается многократным применением тождества Лейбница.

Лемма 3.3. *$f, g \in \mathbf{A}$ алгебраически зависимы $\Leftrightarrow$ $[f, g] = 0$.*

Доказательство. Без доказательства, т.к. лемма довольно известная. □

Алгебраическая независимость означает, что есть многчлен от f и g, не равный нулю.

Следствие 3.1. *$\deg[f, g] = \deg f + \deg g \;\Leftrightarrow\; [\overline{f}, \overline{g}] \neq 0 \;\Leftrightarrow\; \overline{f}$ и $\overline{g}$ алгебраически независимы.*

*-редуцированная пара многочленов

Определение 3.13. *$f, g \in \mathbf{A}$ называются $*$-редуцированными, если*

1) f и g алгебраически независимы;

2) $\overline{f}$ и $\overline{g}$ алгебраически зависимы;

3) $\overline{f} \notin \mathbb{K}[\overline{g}]$, $\overline{g} \notin \mathbb{K}[\overline{f}]$.

Мы будем применять это понятие, в основном, когда f и g - части нашего автоморфизма.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

Алгебраическая независимость f, g выполнена, т.к. это образы x и y при автоморфизме.
Если $\overline{f} = F(\overline{g})$, то можно сделать композицию с элементарным автоморфизмом

$$(3.5) \mapsto \begin{pmatrix} f - F(g) \\ g \\ h \end{pmatrix},$$

тогда старший член f сократится, и если f, g не $*$-редуцированы из-за третьего условия, можно уменьшить степень f.
Случай, когда f, g алгебраически независимы, тоже простой.

Обозначение: теперь f, g - $*$-редуцированная пара и $n = \deg f < \deg g = m$. Равенства быть не может в силу пунктов определения 2) и 3).

$$p = \frac{n}{(n, m)}, \quad s = \frac{m}{(n, m)}$$

Основная техническая лемма

Лемма 3.4. *Пусть $G(x, y) \in \mathbb{K}[x, y]$, $\deg_y G = pq + r$, $0 \leq r < p$.
Тогда*

$$\deg G(f, g) \geq q(pm - m - n + \deg[f, g]) + mr.$$

Доказательство. Без доказательства. Оно основано на том, что утверждение формулируется в терминах алгебры Пуассона. □

Следствие 3.2. $\forall h \in \mathbb{K}[f,g]$ *либо* $\overline{h} \in \mathbb{K}[\overline{f},\overline{g}]$, *либо* $\deg h \geq pm - m - n + \deg[f,g]$.

Замечание: оценить скобку $\deg[f,g]$ - довольно сложная задача, которая сводится к проблеме якобиана, поэтому оценку удобнее писать в таком виде.

Замечание 3.1. $p \geq 2$. $p = \frac{n}{(n,m)}$ *и p не может быть равно 1, т.к. отсюда будет следовать* $m \,\vdots\, n$. *При этом* $\overline{f}$ *и* $\overline{g}$ *алгебраически зависимы, и если степень одного делится на степень другого, то* $\overline{g} \notin \mathbb{K}[\overline{f}]$, *что противоречит третьему условию* $*$*-редуцированности.*

Из последнего замечания получаем

$$pm - m - n + \deg[f,g] \geq 2,$$

тогда $\mathbb{K}[f,g]$ не содержит x_i.

Следствие 3.3. *Пусть* $\Phi: \ (x,y) \mapsto (f,g)$ *- эндоморфизм, тогда не является сюръективным.*
(Потому что образ не содержит x_i*.)*

Другое доказательство теоремы Юнга

Доказательство. Пусть $\varphi: \ (x,y) \mapsto (f,g)$ - автоморфизм.
Тогда φ сюръективен и по следствию 3.3 f и g не $*$-редуцированы.
Первое условие $*$-редуцированности для f и g выполнено, т.к. это образы при автоморфизме. Значит,
1. либо $\overline{f}$ и $\overline{g}$ алгебраически независимы,
2. либо $\overline{f} \in \mathbb{K}[\overline{g}]$ или $\overline{g} \in \mathbb{K}[\overline{f}]$.

Как было показано, второй случай "хороший" , т.к. можно понизить степень.

Во втором случае

$$\begin{matrix} x = F(f,g) & \overline{x} = \overline{F}(\overline{f},\overline{g}) \\ y = G(f,g)' & \overline{y} = \overline{G}(\overline{f},\overline{g})' \end{matrix}$$

и тогда

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \overline{F} \\ \overline{G} \end{pmatrix}$$

тоже будет автоморфизмом, потому что x и y выражаются через $\overline{f},\overline{g}$.
Но $\overline{f},\overline{g}$ - однородные многочлены, легко видеть, что если их степени больше 1, то автоморфизма не будет. □

Автоморфизмы от трех переменных, не понижающие степень при редукции

Пусть

$$\varphi : \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix},$$

тогда степенью автоморфизма будем называть $\deg \varphi = \sum\limits_{i=1}^{n} \deg f_i$.

При $n = 2$ степень любого автоморфизма можно понизить путем композиции с одним элементарным. Будем называть это элементарной редукцией.

Для $n = 3$ это не так. Т.е. ручной автоморфизм раскладывается в композицию элементарных, но в этой цепочке степень не всегда может возрастать монотонно. Хотим привести пример автоморфизма, который не допускает элементарных редукций.

Ясно, что наличие элементарной редукции - это алгоритмически разрешимая проблема: пусть есть многочлены (f, g, h), тогда можно вычитать из f некоторые многочлены от g, h, вычитать из g многочлены от f, h и из h многочлены от f, g. Таких многочленов можно составить конечное число, потому что степени исходных ограничены.

Доказано, что не всегда существует одна редукция, уменьшающая степень, но всегда есть такая композиция с не более чем 4 элементарными автоморфизмами. Для автоморфизма Нагаты доказано, что даже 4-мя композициями его степень понизить невозможно, значит, он дикий.

В этой лекции мы установим, что бывают ручные автоморфизмы, степень которых не понижается элементарной редукцией.

Пример 3.6.

$$h_1 = x_1, \quad h_2 = x_2 + x_1^2, \quad h_3 = x_3 + 2x_1x_2 + x_2^3$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

Ясно, что этот автоморфизм ручной.

$$g_1 = 6h_1 + 6h_2h_3 + h_3^2, \quad g_2 = 4h_2 + h_3^2, \quad g_3 = h_3$$

$$(3.6) \mapsto \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

Этот переход также ручной.
g_1, g_2 *- $*$-редуцированная пара,* $\deg g_1 = 9, \ \deg g_2 = 6, \ \deg g_3 = 3.$

$$f = g_1^2 - g_2^3, \ \deg f = 8$$

Далее,

$$f_1 = g_1 + g_3 + f, \ f_2 = g_2, \ f_3 = g_3 + f$$

$$\deg f_1 = 9, \ \deg f_2 = 6, \ \deg f_3 = 8$$

$$(3.7) \mapsto \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

Это ручной автоморфизм, т.к. его можно представить в виде

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 + f \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} g_1 + g_3 + f \\ g_2 \\ g_3 + f \end{pmatrix}$$

Композиция $(3.6) - (3.8)$ *- нужный автоморфизм.*

Теперь покажем, что Лемма 3.4 $\Rightarrow$ *невозможно сделать элементарную редукцию.*
Как она может получиться? Нужно прибавить к одному из f_1, f_2, f_3 *многочлен от двух других.*

$$f_i + G(f_j, f_k)$$

Чтобы степень уменьшилась нужно, чтобы старший коэффициент сократился, а это значит, что

$$\deg G(f_j, f_k) = \deg f_i$$

Попробуем уменьшить степень f_1.
В терминах Леммы 3.4 $m = 8, n = 6, p = 3,$

$$\deg G(f_2, f_3) \geq q(3 \cdot 8 - 8 - 6 + \ldots) = q(10 + \ldots)$$

Здесь нужно разобраться, может ли q *быть равно нулю. Идея в том, что степень* f_1 *должна быть хотя бы 10, но это не так. Следовательно, элементарная редукция невозможна.*

Лекция 4

Завершение доказательств прошлой лекции

Докажем сначала следствие из Леммы 3.4.

Следствие 4.4. *Пусть $h \in \mathbb{K}[f,g]$, тогда либо $\overline{h} \in \mathbb{K}[\overline{f},\overline{g}]$, либо $\deg h \geq pm - m - n + \deg[f,g]$.*

Здесь учтено, что q может быть равно нулю, что позволит завершить доказательство в Примере 3.6.

Доказательство. Рассмотрим моном $f^i g^j$, его степень равна

$$\deg f^i g^j = i \deg f + j \deg g = in + jm.$$

Если $j < p$, то все мономы $f^i g^j$ имеют разные степени. Действительно, пусть это не так и

$$i_1 n + j_1 m = i_2 n + j_2 m \Leftrightarrow (i_1 - i_2)n = (j_2 - j_1)m \Leftrightarrow (i_1 - i_2)\frac{n}{(n,m)} = (j_2 - j_1)\frac{m}{(n,m)}$$

Отсюда следует, что $(j_2 - j_1)$ делится на p - противоречие с $j_1, j_2 < p$.

Если теперь (в обощначениях Леммы) в выражении $\deg_y G = k = pq + r$ подставим $q = 0$, получим

$$\deg_y G = r < p.$$

Тогда при подстановке в G f и g все мономы будут иметь разные степени, следовательно, выполнено условие $\overline{h} \in \mathbb{K}[\overline{f},\overline{g}]$.

Если же $q > 0$, то $q \geq 1$ и в неравенстве из Леммы

$$\deg G(f,g) \geq q(pm - m - n + \deg[f,g]) + mr$$

выражения $pm - m - n + \deg[f,g]$ и mr неотрицательны, откуда следует вторая часть утверждения. □

Завершим доказательство в Примере 3.4.

Напоминание: мы построили ручной автоморфизм

$$\varphi : \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix},$$

где $\deg f_1 = 9, \deg f_2 = 6, \deg f_3 = 8$. Нужно показать, что несмотря на то, что φ - ручной, не существует элементарного автоморфизма ξ, такого что $\deg \xi \circ \varphi < \deg \varphi$. Композиция выглядит следующим образом :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} af_1 + G(f_1, f_2) \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

Чтобы степень уменьшилась, нужно, чтобы сократился старший член. В терминах Следствия 4.4 $f = f_2, g = f_3$. Оценим степень элемента G, может ли она быть равной 9?

1) $\overline{G(f_2, f_3)} \in \mathbb{K}[\overline{f_2}, \overline{f_3}]$. Тогда, т.к. $\deg f_2 = 6, \deg f_3 = 8$,

$$\deg \overline{f_2}^i \overline{f_3}^j = 6i + 8j \neq 9.$$

2) $\deg G(f_2, f_3) \geq 3 \cdot 8 - 8 - 6 = 10$

Итак, $\deg G$ не может быть равной 9, следовательно, старший член не может сократиться и степень не может понизиться.

Аналогично рассматриваются случаи, когда многочлен G прибавляется к f_2 и f_3.

Идеи доказательства теоремы Шестакова-Умирбаева

Вводятся 4 типа редукций, каждая из которых состоит из ≤ 4 элементарных редукций.
Далее доказывается, что если φ - ручной, то можно понизить степень одним из этих типов. Отсюда есть 2 следствия. (Назовем автоморфизм "хорошим" , если его степень можно понизить одним из типов выше. От противного: предположим, что не все автоморфизмы хорошие, тогда возьмем "плохой" автоморфизм минимальной степени. Тогда есть какая-то редукция, которая переводит его в "хороший" автоморфизм. Далее проверяется, что если ψ - "хороший" , а ϕ к нему редуцируется, то ϕ тоже "хороший" - противоречие.)

Следствие 4.5. *Если*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix},$$

то если можно понизить степень, то можно понизить степень элементарной редукцией.

Отсюда вытекает, что атоморфизм Нагаты - дикий.

Следствие 4.6. *То, что автоморфизм ручной алгоритмически проверяется ($n = 3$).*

Для $n = 4$ не известно, проверяется ли принадлежность к ручным алгоритмически.

Группы ручных автоморфизмов, свободное произведение

Определение 4.14. *Пусть H, N - группы. Зададим их образующими соотношениями $H = \langle S_1 \mid R_1 \rangle$, $N = \langle S_2 \mid R_2 \rangle$.*
Тогда G - свободное произведение H и N, обозн. $G = H * N$, если

$$G = \langle S_1 \cup S_1 \mid R_1 \cup R_2 \rangle.$$

Другими словами, G состоит из следующих слов

$$G = \{h_1 n_1 h_2 n_2 \dots\}$$

Все эти слова разные, за исключением случая, когда элемент n_i тривиальный, и тогда можно перемножить соседние элементы h_i.

Например, если $H = \mathbb{Z}, N = \mathbb{Z}$, то $G = H * N = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ - свободная группа с двумя образующими.

Амальгамированное произведение

Определение 4.15. *G - амальгамированное произведение $H = \langle S_1, R_1 \rangle$ и $N = \langle S_2, R_2 \rangle$ над K, если фиксированы вложения $\varphi : K \hookrightarrow H$ и $\psi : K \hookrightarrow N$ и*

$$G = H *_k N = \langle S_1 \cup S_2 \mid R_1 \cup R_2,\ \varphi(k)\psi^{-1}(k) = e \rangle$$

Другими словами, элемент G - это слово

$$h_1 n_1 h_2 n_2 h_3 \dots$$

Тогда можно заменить n_2 на $n_2 \cdot k$, а h_3 заменить на $k^{-1} \cdot h_3$, здесь имеется в виду, что в первом случае K вложено в N, а во втором случае K вложено в H.

Алгебры многочленов от двух переменных есть амальгамированное произведение их подгрупп

$L = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + N \mid \det A \neq 0 \right\}$ - подгруппа аффинных автоморфизмов.

$B = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} c_1 x_1 + f(x_2) \\ c_2 x_2 \end{pmatrix} \mid c_1 \neq 0,\ c_2 \neq 0 \right\}$ - подгруппа треугольных автоморфизмов.

Теорема 4.4.

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{K}[x_1, x_2]) \cong L *_{L \cap B} B$$

Здесь $L \cap B = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} c_1 x_1 + b x_2 \\ c_2 x_2 \end{pmatrix} \mid c_1 \neq 0,\ c_2 \neq 0 \right\}$

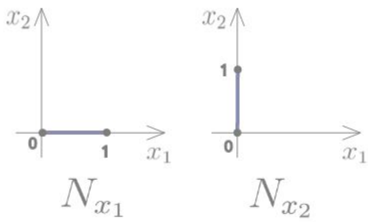
Доказательство. Мы уже знаем, что группа $\mathrm{Aut}(\mathbb{K}[x_1, x_2])$ порождается группами L и B. Соответственно, образующие нужно просто объединить, а новые добавлять не нужно.
Ясно, что соотношения, из L и B сохранятся и что новые соотношения из определения также добавятся.

Т.е. нужно доказать только то, что новые соотношения не появятся.
Для этого достаточно показать, что если $l_1, \ldots, l_n \in L \backslash B$ и $b_1, \ldots, b_n \in B \backslash L$, то произведение $l_1 b_1 \ldots l_n b_b \neq e$ (заметим, что в этом произведении не обязательно четное количество членов). В с.д. соотношение - это некое нетривиальное слово от l и b, равное e. Понятно, что в нащем нетривиальном слове можно считать, что любой элемент из B не лежит в L и наоборот (потому что если это не так, будем иметь 3 элемента из одной группы подряд и, объединив их в один элемент из этой группы, можем укоротить слово).

Имеем следующий автоморфизм

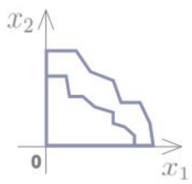
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

Многоугольники Ньютона для x_1 и x_2 выглядят следующим образом



Лемма 4.5. *Почти всегда*

1) *После автоморфизма b_i многоугольник Ньютона $N(f)$ строго содержит $N(g)$, причем граница $N(f)$, кроме той части, что лежит на осях, не лежит в $N(g)$.*
   Пояснение: изобразим на одном рисунке $N(f)$ и $N(g)$ (на самом деле, мы уже знаем, что они будут треугольниками). Это будут некоторые выпуклые тела, вписанные в положительный октанд.

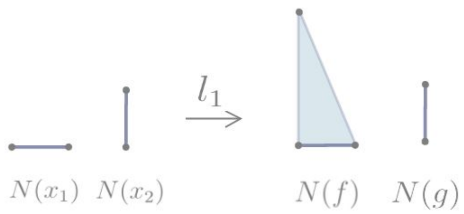


2) После автоморфизма l_j $N(g)$ сожержит $N(f)$ (уже не строго).

Доказательство. Индукция по длине слова. Есть два варианта:

$$\dots b_1 l_1$$
$$\dots l_1 b_1$$

База. Начинаем с такой пары: $f = x_1,\ g = x_2$ (с соответствующими многоугольниками Ньютона).
Применим сначала b_1. Напомним, что этот автоморфизм заключается в прибавлении к x_1 некоторого многочлена от x_2 и умножении x_1 и x_2 на константы (что не влияет на многоугольник Нлютона). $f \notin L \;\Rightarrow\; \deg g \geq 2$. Получим следующее



Видно, что первое уловие Леммы выполнено.

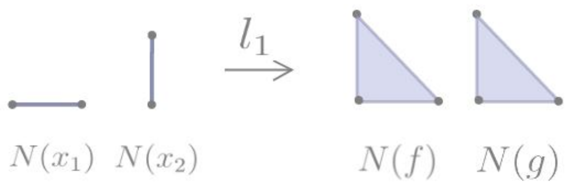
Теперь применим аффинный автоморфизм. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + n_1 = f \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + n_2 = g \end{pmatrix}$$

Почти всегда многоугольники Ньютона будут устроены следующим образом

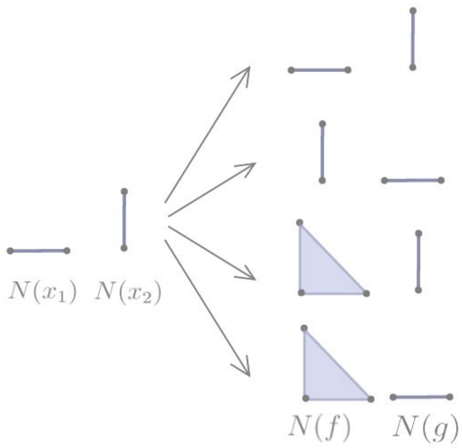


Второе условие Леммы выполнено.

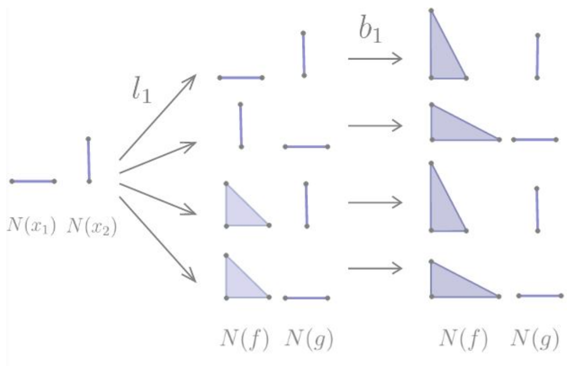
Если $a_{21} \neq 0$ и $a_{22} \neq 0$, то $N(g)$ содержит $N(f)$ и условие Леммы выполнено.

Не может быть, что $a_{21} = 0 = n_2$, иначе попадаем в B.

Рассмотрим, какими могут быть многоугольники Ньютона, если $N(g)$ не является треугольником.



Так может действовать l_1, далее применим b_1. После b_1 условия Леммы выполня-



ются.

В случае, если в нашем слове нет b_1, получим $l_1 = e$ - соотношение в L, а соотношения из группы L содержатся в G.

Шаг. Пусть $N(f) \subseteq N(g)$ и мы применяем b_i.
Рассмотрим многоугольник Ньютона $N(g^2)$

Кроме того, $N(a_m g^m + \ldots + a_0) = N(g^m)$, т.к. $N(g^m)$ строго содержит все многоугольники от меньших степеней, более того, их границы не пересекаются (за исключением частей на осях).

Далее, $N(f + a_m g^m + \ldots + a_0) = N(g^m)$ за счет того, что $m \geq 2$ и $N(f)$ содержится в $N(g)$, отсюда $N(f)$ строго мажорируется.

Итак, мы доказали, что при

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \overset{b_i}{\mapsto} \begin{pmatrix} \widetilde{f} \\ g \end{pmatrix}$$

$N(\widetilde{f}) \supset N(g)$ - граница, не лежащая на осях, не лежит в $N(g)$. □

Рассмотрим теперь случай, когда последний автоморфизм был l_i.

Знаем, что $N(f) \supset N(g)$ и граница не лежит в $N(g)$.

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11}f + a_{12}g + n_1 = f \\ a_{21}f + a_{22}g + n_2 = g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{f} \\ \widetilde{g} \end{pmatrix}$$

Если $a_{21} \neq 0$, то $N(\widetilde{g}) = N(f)$, поскольку $N(\widetilde{f}) \subseteq N(f)$.
Пусть $a_{21} = 0$ и $n_2 \neq 0$. Рассмотрим следующий автоморфизм, лежащий в пересечении групп

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} c_1x_1 \\ c_2x_2 + d \end{pmatrix}$$

Любой автоморфизм

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11}f + a_{12}g + n_1 \\ a_{22}g + n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1x_1 + F(x_2) \\ c_2x_2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 + d \end{pmatrix} = s \circ t$$

есть композиция двух, один из которых лежит в B, а второй в L. Имеем следующее подслово

$$\dots b_i\ l\ b_{i+1} \dots = \dots b_i\ s \circ t\ b_{i+1} \dots$$

Автоморфизм s можно объединить с b_i, т.к. s лежит в пересечении. Осталось переместить t. Имеем

$$\dots b_i\ t\ b_{i+1} \dots$$

Допишем слева $\widetilde{t}\widetilde{t}^{-1}$, рассмотрим выделенную композицию (лежащую в B)

$$\dots \widetilde{t}\,\underbrace{\widetilde{t}^{-1}\ b_i\ t}\,b_{i+1} \dots$$

и докажем, что это снова будет автоморфизм из B (путем специально подобранного $\widetilde{t}$). Распишем выделенную цепочку преобразований

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 + d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} c_1x_1 + F(x_2 + d) \\ c_2x_2 + c_2d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} c_1x_1 + F(x_2 + d) \\ c_2x_2 \end{pmatrix}$$

Итак, у нас было некоторое слово, для которого мы хотим доказать невозможность следующего

$$l_1b_1l_2b_2 \dots l_nb_n = \mathrm{id}$$

в силу того, что многоугольники Ньютона x_1 и x_2 после такой цепочки преобразований не равны многоугольникам Ньютона тождественного автоморфизма.
В с.д., если l_i - "плохой" , т.е.

$$l_i: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + n_1 \\ a_{22}x_2 + n_2 \end{pmatrix},$$

то l_i можно представить в виде композиции $s \circ t$. Здесь s переносится к b_i, а t "перебрасывается" влево в $\widetilde{t}$.
Таким образом, мы уменьшаем длину цепочки.

$\square$

Лекция 5

Автоморфизм Нагаты дикий над кольцом целых чисел

Напомним, что идея доказательства теоремы Шестакова-Умирбаева сводится к следующему утверждению

Увеpждение 5.4. *Автоморфизм Нагаты дикий над* $\mathbb{K}[\mathbb{Z}]$.

Автоморфизм Нагаты

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + (x^2 - yz)z \\ y + (x^2 - yz)x + (x^2 - yz)^2 z \\ z \end{pmatrix}, \quad \sigma = x^2 - yz$$

С помощью теоремы Шестакова-Умирбаева можно доказать, что если при автоморфизме z переходит в z, то при любом разложении на элементарные для каждого автоморфизма из разложения z также переходит в z.

Будем считать, что z - константа из кольца $\mathbb{K}[\mathbb{Z}]$ (коэффициент) и рассмотрим автоморфизм Нагаты от двух переменных.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + \sigma z \\ y + 2\sigma x + \sigma^2 z \end{pmatrix}$$

На это отображение можно смотреть как на автоморфизм кольца многочленов от двух переменных $\mathbb{K}[z][x, y]$ (z фиксировано).

Ясно, что есть вложение $\mathbb{K}[z][x, y] \subset \mathbb{K}[\mathbb{Z}][x, y]$ (мы расширили константы, к многочленам добавились рациональные функции). Тогда попадаем в алгебру многочленов от двух переменных над некоторым полем.

Формально говоря, нужно еще потребовать алгебраическую замкнутость поля, поэтому далее будем рассматривать такое вложение $\mathbb{K}[z][x, y] \subset \overline{\mathbb{K}[\mathbb{Z}]}[x, y]$. В $\overline{\mathbb{K}[\mathbb{Z}]}[x, y]$ любой автоморфизм является ручным по теореме Юнга (в частности, и автоморфизм Нагаты).

Наше утверждение означает, что автоморфизм Нагаты нельзя разложить в элементарные алгебры многочленов, у которых коэффициенты будут многочленами (хотя с рациональными функциями это возможно). Покажем это.

Обозначения:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \lambda x + F(y) \\ \mu y \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \neq 0 \right\}$$

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \mid M \in GL_n \right\}$$

Доказательство. Сначала разложим автоморфизм Нагаты с коэффициентами - рациональными функциями на элеменеты из B и A.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \overset{a_1}{\mapsto} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \overset{b_1}{\mapsto} \begin{pmatrix} -zy + x^2 \\ x \end{pmatrix} \overset{a_2}{\mapsto} \begin{pmatrix} x \\ -zy + x^2 \end{pmatrix} \overset{b_2}{\mapsto} \begin{pmatrix} x + \sigma z \\ \sigma \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\overset{a_3}{\mapsto} \begin{pmatrix} \sigma \\ x + \sigma z \end{pmatrix} \overset{b_3}{\mapsto} \begin{pmatrix} y - \frac{x^2}{z} + \frac{x^2}{z} + \frac{2x\sigma z}{z} + \frac{\sigma^2 z^2}{z} \\ x + \sigma z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + 2x\sigma + \sigma^2 z \\ x + \sigma z \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\overset{a_4}{\mapsto} \begin{pmatrix} x + \sigma z \\ y + 2x\sigma + \sigma^2 z \end{pmatrix}$$

Здесь

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -zx + y^2 \\ y \end{pmatrix}$$

$$b_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + yz \\ y \end{pmatrix}$$

$$b_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\frac{x}{z} + \frac{y^2}{z} \\ y \end{pmatrix}$$

Видно, что автоморфизм Нагаты от ручных отличает только деление на z.

Покажем теперь, что при фиксированном z автоморфизм Нагаты не раскладывается в композицию элементарных с коэффициентами-многочленами.
Для этого воспользуемся теоремой 4.4. Из нее следует, что если есть некое разложение в произведение a_i и b_i, то единственное, что можно сделать - перебросить из a_i в соседний b_j (или из b_i в соседний a_j) некторый элемент из пересечения A и B.

Деление на z есть только в b_3, попробуем его исправить: перекинуть некий элемент пересечения из a_4 и a_3. Тогда получим

$$\widetilde{b_3} = \varphi \circ b_3 \circ \psi, \tag{5.1}$$

$$\varphi : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \Lambda & T \\ 0 & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \lambda & t \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда композиция (5.3) выглядит следующим образом

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \overset{\psi}{\mapsto} \begin{pmatrix} \lambda x + ty + c \\ \mu y \end{pmatrix} \overset{b_3}{\mapsto} \begin{pmatrix} -\frac{\lambda}{z}x - \frac{t}{z}y + \frac{c}{z} + \frac{\mu^2 y^2}{z} \\ \mu y \end{pmatrix} \overset{\varphi}{\mapsto}$$

$$\overset{\varphi}{\mapsto} \begin{pmatrix} \Lambda\left(-\frac{\lambda}{z}x - \frac{t}{z}y + \frac{c}{z} + \frac{\mu^2 y^2}{z}\right) + T\mu y + C \\ \mu M y \end{pmatrix}$$

Из a_4 нельзя перекинуть влево ничего, что копменсировало бы знаменатель, поэтому компенсировать его приходится перекидыванием из a_3 чего-то, делящегося на z. Далее нужно протянуть цепочку перекидываний элементов до левого края.

Автоморфизмы a_2, b_2, a_3 можно по линейности объединить в один элемент (с точки зрения добавления знаменателя) $\widetilde{a_2} = a_2 \circ b_2 \circ a_3$.

$$\widetilde{a_2} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y + xz \end{pmatrix}$$

От $\widetilde{a_2}$ нужно отщипнуть что-то, у чего λ и μ будут делиться на z. Если λ, μ делятся на z, то $\widetilde{a_2}$ умножаетмя на обратный автоморфизм, и у него будет знаменатель. Так или иначе, тогда появится проблема с b_1, которая частично компенсируется домножением на z в образе x, но и у образа y тоже появится знаменатель. У a_1 также нет ресурсов, чтобы компенсировать знаменатель.

Таким образом, автоморфизм Нагаты нельзя разложить на элементарные с коэффициентами-многочленами. □

Жёсткие многообразия

Определение 5.16. *Аффинное алгебраческое многообразие X называется жестким, если не существует нетривиального G_a-действвия на нем.*

Напомним, что G_a - аддитивная группа нашего основного поля. Соответственно, все действия алгебраические.
Тривиальное дейстие - любой элемент действует тождественным автоморфизмом.

Переформулируем определение в терминах LND. Ранее говорилось, что G_a-действия на многообразии X соответствуют LND.

Тогда X - жесткое, если $\forall\ \partial - LND$ алгебры $\mathbb{K}[X]$, $\partial \equiv 0$.

Группа автоморфизмов далеко не всегда является алгебраической группой. Например, для аффинного пространства она явно не является алгебраической, если только аффинное пространство размерности хотя бы 2.
Докажем более общую теорему.

Если группа автоморфизмов алгебраическая, то либо X жёсткое, либо прямая.

Теорема 5.5. *Если X не жесткое и X не изоморфно L - прямой, то $\mathrm{Aut}(X)$ не является алебраической.*
Эквивалентная формулировка: если $\mathrm{Aut}(X)$ алгебраическая, то X либо жесткое, либо прямая.

Доказательство. Рассмотрим два случая.

1) $\dim X = 1$. Тогда есть группа G_a, которая дейтсвует на многообразии X. Какие бывают орбиты у такого действия? Либо это неподвижная точка, либо прямая.
В с.д., у группы G_a нет нетривиальных алгебраических подгрупп, соответственно, стабилизатор должен быть алгебраической подгруппой. Получается, что либо стабилизатор точки - это все G_a, либо он тривиальный. Тогда в первом случае орбита - это неподвижная точка, а во втором случае это прямая.

   Факт из теории алгебраических групп: у действия унипотентной группы (G_a - унипотентная) все орбиты замкнуты.

   Т.е. если действие нетривиальное, то орбиты-точки не подходят, остаются орбиты-прямые. Теоретически могло бы быть так, что к прямой приклеены некоторые точки в качестве ее замыкания. Но, поскольку все орбиты замкнуты, то эта прямая замкнута сама по себе, значит, точек в ее замыкании быть не может и $X = \mathbb{A}^1$.

2) $\dim X \geq 2$.

   Факт из теории LND: Пусть $0 \neq \partial \in LND$, тогда $\operatorname{tr.deg} \ker \partial = \operatorname{tr.deg} \mathbb{K}[X] - 1 \geq 1$, т.е. $\exists f \in \ker \partial \ : \ f \notin \mathbb{K}$.
Т.е. нам достаточно, чтобы в $\ker \partial$ лежал какой-то нетривиальный многочлен.

   Заметим, что если $f \in \ker \partial$, то любой многочлен $h(f)$ также лежит в ядре. Тогда можем рассмотреть такое дифференцирование

$$h(f)\partial.$$

   Покажем, что это действительно дифференцирование и, более того, это LND

$$h(f)\partial(ab) = h(f)(\partial(a)b + a\partial(b)) = \underbrace{h(f)\partial}(a)b + \underbrace{h(f)\partial}(b)a.$$

   Т.е. выполняется тождество Лейбница.

$$(h(f)\partial)^2(a) = h(f)\partial(h(f)\partial(a)) = (h(f))^2\partial^2(a)$$

$$\ldots$$

$$(h(f)\partial)^N(a) = (h(f))^N\partial^N(a)$$

   Поскольку ∂ - LND, $\partial^N(a)$ при некотором N занулится, откуда следует, что $h(f)\partial$ - LND.

   Эта конструкция дает нам довольно большое количество автоморфизмов. Возьмем

$$\exp(h(f)\partial)$$

и определим, что это за группа.
Умножение:
$$\exp(h(f)\partial)\cdot\exp(s(f)\partial)\exp((h+s)(f)\partial),$$
т.к. эти два дифференцирования коммутируют.

Получается, что автоморфизмы соответствуют многочленам, и при композиции автоморфизмов многочлены складываются.

Таким образом,
$$\{\exp(h(f)\partial),\circ\}\cong(\mathbb{K}[x],+).$$
$(\mathbb{K}[x],+)$ - бесконечномерное векторное пространство, его никак нельзя поместить в конечномерную алгебраическую группу.
Раз даже подгруппа нашей группы автоморфизмов не может содержаться ни в какой алгебраической группе, то вся группа автоморфизмов - тем более.

Показали, что $\mathrm{Aut}(X)$ не алгебраическая.

$\square$

Если мы теперь хотим разобрать случай, когда группа автоморфизмов является алгебраической, то необходимо рассматривать класс жестких многообразий.

Напомним результат для случая прямой
$$\mathrm{Aut}(J)\cong\mathbb{K}^{\times}\leftthreetimes\mathbb{K}\cong G_m\leftthreetimes G_a.$$

Следствие 5.7. *Если $\mathrm{Aut}(X)$ - алгебраическая и $X\ncong L$, то $\mathrm{Aut}(X)$ - конечное расширение тора.*

Т.е. связная компонента единицы - это тор, есть конечное число этих связных компонент.

Доказательство. Следует из теории алгебраических групп. Утверждается, что алгебраические группы всегда порождены максимально своим тором и еще какими-то корневыми подгруппами. Корневые подгруппы изоморфны G_a, и их не может быть. Соответственно, единственная связная алгебраическая группа, которая не допускает в себе G_a подгрупп - это тор.
Из-за несвязности можно еще взять некое конечное расширение, но не более того. $\square$

Вопрос: Верно ли, что для жестких многообразий X $\mathrm{Aut}(X)$ - алгебраическая? Ответ "нет" . Приведем контрпример (из первой лекции).
$$X=\mathbb{T}^n=(\mathbb{K}^{\times})^n$$
$$\mathrm{Aut}(X)\cong GL_n(\mathbb{Z})\leftthreetimes\mathbb{T}^n$$

У тора слишком много обратимых функций. Посмотрим, что произойдет, если их запретить.

Предложение о единственном максимальном торе.

Гипотеза: Если X - жесткое и в нем нет нетривиальных обратимых функций $\mathbb{K}^\times[X] = \mathbb{K}^\times$, то $\mathrm{Aut}(X)$ - конечное раширение тора.

В общем случае гипотеза пока не доказана, но и конрпримеров к ней тоже нет.

Докажем ее в некоторых частных случаях.

Предложение 5.1. *Пусть X - жесткое. Тогда* $\mathrm{Aut}(X)$ *содержит единственный максимальный тор (группу, изоморфную* $(\mathbb{K}^\times)^n$*).*

Какой-то максимальный тор всегда есть (он может быть тривиальным).
Имеется в виду максимальность по включению. Берем некий тор, если он не максимальный, расширяем его до тех пор, пока это возможно. Есть теорема, утверждающая, что если многообразие имеет размерность n, то на нем не может эфективно действовать более чем n-мерный тор, соответственно, до бесконечности тор расширять нельзя.

Пока не ясно, почему он будет единственным. Не ясно даже то, будут ли все максимальные торы иметь одинаковую размерность.

Например, если взять (не жесткое) многообразие $\mathbb{A}^n$, то многомерный тор, действующий на нем

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad d_i \neq 0.$$

Он не единственный, т.к. можно взять автоморфизм $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathbb{A}^n)$ и, как минимум, сопрячь этот максимальный тор.
Так, для всех таких диагональных матриц

$$\left\{ \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} \right\} = D \cong (\mathbb{K}^\times)^n, \quad \alpha D \alpha^{-1} \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{A}^n).$$

Открытая проблема - есть ли другие максимальные торы?

Доказано, что любой максимальный n-мерный тор имеет вид $\alpha D \alpha^{-1}$, но не понятно, почему максимальный тор не может быть не n-мерным.

Докажем предложение 5.1.
Идея в том, чтобы двояко взглянуть на подгруппы, изоморфные $\mathbb{K}^\times$ в группе автоморфизмов.

Пусть $\Lambda \cong \mathbb{K}^\times \hookrightarrow \mathrm{Aut}(X)$. Подгруппе Λ соответствует $\mathbb{Z}$-градуировка алгебры $\mathbb{K}[X]$.

Из теории алгебраических групп известно, что если $\mathbb{K}^\times$ или любой тор действует на каком-то многообразии, то на алгебре он будет действовать линейно. При этом линейное действие тора выглядит следующим образом

$\mathbb{K}[X] = \bigoplus \mathbb{K}[X]_i$, где $\forall f \in \mathbb{K}[X]_i$

$$\Lambda \ni t \cdot f = t^i f.$$

С другой стороны, подгруппе Λ можно сопоставить полупростое дифференцирование δ. Оно определяется следующим так: пусть $f \in \mathbb{K}[X]_i$, тогда $\delta(f) = if$.
Легко проверить, что δ удовлетворяет тождеству Лейбница (упражнение), т.е. δ - дифференцирование.
На неоднородных элементах δ определяется по линейности.

Определение 5.17. *Локально конечное (локально ограниченное) дифференцирование δ - это такое дифференцирование, что $\forall f \in \mathbb{K}[X]$ существует конечномерное δ-инвариантное подпространство $f \ni V \subset K[X]$.*

Лемма 5.6. *Если δ - LND или δ - полупростое дифференцирование, то δ - локально конечно.*

Доказательство леммы.

Доказательство. Пусть δ - LND. В какое δ-инвариантное подпространство можно включить f?

$$f \in \langle f, \delta(f), \delta^2(f), \dots \rangle$$

Оно будет конечномерным, т.к. δ - LND.

Если δ - полупростое дифференцирование, то представим f как

$$f = \sum f_j,$$

где f_j - однородные компоненты.
Далее нужно взять линейную оболочку $\langle f_j \rangle$. Поскольку есть градуировка, этих компонент будет конечное число. Линейная оболочка - конечномерное пространство, и поскольку каждое f_j умножается на число, оно будет δ-инвариантным. □

Лемма 5.7. *Пусть задана градуировка $\mathbb{K} = \bigoplus\limits_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{K}[X]_i$, $\delta = \sum \delta_i$ - локально конечное дифференцирование, такое, что $\delta_i(\mathbb{K}[X]_j) \subset \mathbb{K}[X]_{i+j}$. Можно доказать, что поскольку $\mathbb{K}[X]$ конечно порождено, в сумме $\delta = \sum\limits_{i=l}^{k} \delta_i$ конечное число слагаемых. Тогда если $l \neq 0$, то δ_l - LND, и если $k \neq 0$, то δ_k - LND.*

Т.е. если разложить дифференцирование в сумму однородных, то крайние однородные компоненты почти всегда будут LND.

Выведем из этой леммы предложение 5.1.

Доказательство. LND в нашем случае запрещены, поскольку X - жесткое. Значит, единственный вариант, если есть какая-то градуировка и какое-то локально конечное дифференцирование, то $\delta = \delta_0$.

Рассмотрим две подгруппы

$$\Lambda \cong \mathbb{K}^\times \subset \mathrm{Aut}(X) \supset M \cong \mathbb{K}^\times$$

и применим к ним разные подходы.

Группе Λ сопоставим $\mathbb{Z}$-градуировку, а группе M - полупростое дифференцирование δ. Тогда для этой $\mathbb{Z}$-градуровки и этого δ должно выполняться $\delta = \delta_0$.

$\mathbb{K} = \bigoplus\limits_{i\in\mathbb{Z}} \mathbb{K}[X]_i$, и Λ действует следующим образом: умножает компоненту $\mathbb{K}[X]_i$ на t^i.
M действует некой экспонентой $\exp \delta$.

Лемма 5.8. *Если $\delta = \delta_0$, то Λ и M коммутируют.*

Из леммы 5.8 следует, что Λ и M можно объединить в один двумерный тор. Далее продолжаем так же, только вместо Λ берем двумерный тор, и ему уже будет соответствовать $\mathbb{Z}^2$ градуировка. Несложно разложить δ по $\mathbb{Z}^2$ градуировке и получить, что $\delta = \delta_0$, и тогда M будет коммутировать уже с двумерным тором.

Если тор не единственный, то существует 2 не коммутирующих $\mathbb{K}^\times$-подгруппы в $\mathrm{Aut}(X)$. Это верно, т.к. если есть два коммутирующих тора, то их можно объединить в больший тор. Если этого сделать не получается, значит, есть хотя бы одна подгруппа в одном и в другом торе, изоморфные $\mathbb{K}^\times$, которые которые не коммутируют.

С другой стороны, мы доказали, что если многообразие жесткое, то любые две $\mathbb{K}^\times$-подгруппы коммутируют. Получили противоречие. □

Леммы 5.7, 5.8 будут доказаны позже.

Лекция 6

Доказательство лемм прошлой лекции.

Докажем Лемму 5.7. в усиленной формулировке.

Лемма. *а) Пусть δ - локально ограниченное дифференцирование, $\mathbb{K}[X] = \bigoplus\limits_{i\in\mathbb{Z}} \mathbb{K}[X]_i$, тогда $\delta = \sum\limits_{i=l}^{k} \delta_i$.*
Если $l \neq 0$, то δ_l - LND, если $k \neq 0$, то δ_k - LND.
b) Если δ - LND, тогда δ_l и δ_k - LND (даже если $l = 0$ и $k = 0$).

Доказательство. **а)** Локальная ограниченность означает следующее: если есть некоторое f, то по нему есть конечномерное векторное пространство $V \ni f$, которое δ-инвариантно. Раз оно δ-инвариантно, то при многократном применении δ к f мы не выйдем за пределы этого пространства

$$f \in V,\ \delta(f) \in V,\ \ldots,\ \delta^k(f) \in V,\ \ldots$$

При этом $\delta = \sum\limits_{i=l}^{k} \delta_i$.

Напомним, почему эта сумма конечна.
Степени дифференцирования i отвеают за то, на сколько сдвигается градуировка. Алгебра $\mathbb{K}[X]$ конечно порождена, значит, можно взять конечное количество образующих $b_1, \ldots, b_m$. Далее можно взять $\delta(b_i) = \sum c_{ij}$, где будет конечное число однородных составляющих.
На сколько тогда могут сдвигаться образующие? Множество сдвигов образующих порождено $\{j - \deg b_i\}$. Можно считать, что b_i однородные, тогда получим конечное число сдвигов для образущих. Из тождества Лейбнца следует, что множество сдвигов любых однородных элементов совпадает с множеством сдвигов образующих.

Будем считать, что f - однородное, $\deg f = p$. Принадлежность дифференцирования к LND достаточно проверять на однородных.

Утверждается, что $\delta^n(f) = \delta_l^n(f) + \ldots$, здесь $\delta_l^n(f) \in \mathbb{K}[X]_{p-ln}$, а все остальные члены лежат в $\bigoplus \mathbb{K}[X]_{>p+ln}$. Получается, что $\delta_l^n(f)$ - млаший член, и он не может ни с чем сократиться.

Если $l \neq n$, то с помощью этого младшего члена мы попадаем во все более сдвигающуюся компоненту. При большом n и отрицательном l выражение $p+ln$ сильно отрицательно, а при положительном l - сильно положительно. Так или иначе, мы все время находимся в V, а оно также разлагается на комопоненты $V = \bigoplus\limits_{i]inI} V_i$, I - конечно.
Значит, если $l \neq 0$, то рано или поздно мы выйдем за пределы множества I.

С одной стороны, $\delta_l^n(f)$ не может ни с чем сократиться, а с другой стороны он вышел за пределы I, следовательно, $\delta_l^n(f)=0$.

Рассуждения с k аналогичны, младший член заменяется на старший.

b) Если $l \neq 0$, то это частный случай a). Поэтому рассмотрим δ - LND, $l=0$. Здесь $\delta_l^n(f)$ снова будет младщим членом $\delta^n(f)$, которое рано или поздно станет равно 0 из-за локльной нильпотентности. Значит, $\delta^n(f)$ - младший член нуля, т.е. $\delta_l^n(f)=0$.

□

Докажем Лемму 5.8.

Лемма. *δ - полупростое дифференцирование, $\mathbb{K}[X]=\bigoplus\limits_{i\in\mathbb{Z}}\mathbb{K}[X]_i$, $\delta=\delta_0$. Тогда G_m - подгруппа, соответствующая δ, и градуировки коммутируют.*

Доказательство. G_m-действие, которое соответствует градуировке, умножает компоненты $\mathbb{K}[X]_i$ на t^i.

Дифференцированию δ соответствует другая градуировка $\delta \to \mathbb{K}[X]=\bigoplus \widetilde{\mathbb{K}}[X]_j$. Рассмотрим $f\in\mathbb{K}[X]_i$ и разложим его по другой градуировке $f=\sum f_j$. Тогда $\delta(f)=\sum jf_j$.

Получили, что $\sum f_j\in\mathbb{K}[X]_i$ и $\sum jf_j\in\mathbb{K}[X]_i$. Несложно, продолжая эту операцию, получить, что $\sum j^2 f_j\in\mathbb{K}[X]_i$ и т.д., откуда $\forall j \;\; f_j\in\mathbb{K}[X]_i$.
Если какая-то сумма однородных во втором смысле компонент являтется однородной в первом смысле, то и каждая однородная во втором смысле компонента является однородной в первом смысле.

Имеем $f=\sum f_j,\; f_j\in\mathbb{K}[X]_i$. Подействуем на f двумя разными способами.
Первый: действуем согласованно с первой градуировкой, т.е.

$$f\to t^i f = t^i\sum f_j.$$

Второй: далее действуем согласованно со второй градуировкой

$$t^i\sum f_j \to t^i \sum s^j f_j. \tag{6.1}$$

Теперь в обратном порядке

$$f=\sum f_j\to\sum s^j f_j\to t^i\sum s^j f_j. \tag{6.2}$$

Равенство (6.1) = (6.2) завершает доказательство. □

$\mathrm{Aut}(X)$ - **конечное расширение тора.**

Мы получили, что для жесткого многообразия в его группе автоморфизмов есть единственный максимальный тор. Вопрос в том, насколько этого достаточно, чтобы можно было описать группу автоморфизмов и понять, что группа автоморфизмов является конечным расширением тора. Разберем те случаи, когда понятно, что этого достаточно.

Случай 1. Строго острое действие (pointed)

Пусть есть максимальный тор $T \subset \mathrm{Aut}(X)$, X - жесткое, $\dim T = k$. Тор действует на X и, соответственно, на алгебре регулярных фукний $\mathbb{K}[X]$. Более того, алгебраическое действие на X оборачивается линейным действием на $\mathbb{K}[X]$.

Базовый факт теории представления торов: любое представление тора есть сумма одномерных. На одномерных тор действует умножением на некий характер, т.е.

$$\mathbb{K} = \bigoplus_{a_i \in \mathbb{Z}} \mathbb{K}[X]_{a_1,\ldots,a_k}$$

$$(t_1, \ldots, t_k) \cdot f = t_1^{a_1} \ldots t_k^{a_k} f, \quad f \in \mathbb{K}[X]_{a_1,\ldots,a_k},\ (t_1, \ldots, t_k) \in T.$$

Однородные компоненты соответствуют наборам целых чисел, которые можно изобразить как точки в некоторой k-мерной решетке. Нкоторые из этих компонент равны только нулю, а некоторые не равны нулю.

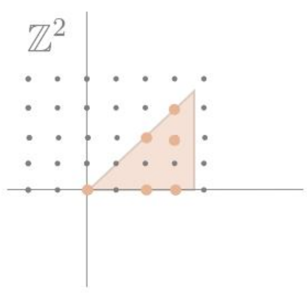
Определение 6.18. *Моноид весов* $P = \{(a_1, \ldots, a_k) \mid \mathbb{K}[X]_{a_1,\ldots,a_k} \neq \{0\}\}$.

Несложно видеть, что 0 всегда лежит в P, поскольку в нашей алгебре есть константы, а константы лежат в нулевой компоненте.

С другой стороны, есть операция сложения векторов. Пусть $\mathbb{K}[X]_{a_1,\ldots,a_k} \ni f \neq 0$, $\mathbb{K}[X]_{b_1,\ldots,b_k} \ni g \neq 0$, тогда

$$0 \neq fg \in \mathbb{K}[X]_{a_1+b_1,\ldots,a_k+b_k}.$$

Изобразим моноид в двумерной решетке.



Отметим точки, соответствующие элементам из P и возьмем конус $\sigma = \mathbb{Q}_{\geq 0}P$ - множество всех неотрицательных рациональных комбинаций векторов из P.
Будем называть σ конусом весов.

Имеем строго острое действие, если выполнены следующие условия:

1) σ - острый конус, т.е. не содержит нетривиальных подпространств.

2) Нулевая компонента - это только константы, $\mathbb{K}[X]_{0,\dots,0} = \mathbb{K}$.

Теорема 6.6. *Если действие $T \curvearrowright X$ строго острое, то* $\mathrm{Aut}(X)$ *- алгебраическая группа (конечное расширение тора, если $X \neq L$).*

Доказательство. $\mathrm{Aut}(X) \supset T$ - единственный максимальный тор. Пусть $\varphi \in \mathrm{Aut}(X)$, рассмотрим

$$\varphi T \varphi^{-1} = T,$$

получим тор такой же размерности, а раз он должен лежать в T, то совпадает с T.
Получается, T - нормальная подгруппа $\mathrm{Aut}(X)$.
Любой автоморфизм φ на X при сопряжении индуцирует автоморфизм тора.

Определим, куда может переходить $\varphi(\mathbb{K}[X]_{i_1,\dots,i_k})$. Пусть $\varphi(f) \in (\mathbb{K}[X]_{i_1,\dots,i_k})$, тогда

$$\varphi t \varphi^{-1} \cdot f = \varphi(t_1^{i_1} \dots t_k^{i_k} f) = t_1^{i_1} \dots t_k^{i_k} \varphi(f).$$

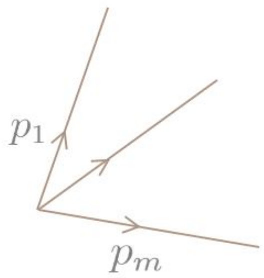
Т.е. мы взяли однородный элемент f, применили $\varphi(f)$ и подействовали (любым) элементом тора и получили, что $\varphi(f)$ снова умножается на некоторую константу. При действии тора на константу умножаются только однородные элементы.

Т.о. φ переводит однородный элемент в однородный. Тогда несложно понять, что φ индуцирует автоморфизм ψ моноида P.

Элементы из P φ переводит в элементы из P, потому что это были ненулевые однородные компоненты.
Сумму φ переводит в сумму. Если f был какого-то веса λ, а g был какого-то веса μ, то fg был веса $\lambda\mu$. Обозначим вес $\varphi(f)$ через $\widetilde{\lambda}$, а вес $\varphi(g)$ через $\widetilde{\mu}$, тогда вес $\varphi(f)\varphi(g) = \varphi(fg)$ равен $\widetilde{\lambda}\widetilde{\mu}$.
Осталось сказать, что разные веса переходят в разные.

Тогда получаем, что у нас есть некое отображение, которое является гомоморфизмом, и есть обратное к нему, потому что можно сделать обратное сопряжение, откуда получаем, что наше отображение - автоморфизм моноида P.

Посмотрим, какие есть автоморфизмы моноида P, когда σ острый.
Вопрос, чем порождается P как моноид - более сложный, но у нас есть так называемые выделенные порождающие - это самые короткие вектора по ребрам конуса σ.



Несложно видеть, что $\psi(p_i) = p_j$. Если известно соотношение между i и j, то по нему можно восстановить ψ, т.к. ψ продолжается до линейного отображения $\mathbb{Q}^k \mapsto \mathbb{Q}^k$.
Причем если конус был полной размерности (а это так, из эффективности действия тора), то это отображение единственно.

Получается, что для ψ есть лишь конечное количество возможностей (не больше чем $m!$).

Получили гомоморфизм $\Phi: \ \mathrm{Aut}(X) \mapsto \mathrm{Aut}(X), \quad \phi \mapsto \psi$. Рассмотрим $\ker\Phi$, оно соответствует тривиальному ψ - каждая однородная компонента переходит в себя. Выберем в $\mathbb{K}[X]$ конечный набор однородных порождающих $\mathbb{K}[g_1, \ldots, g_l], \quad g_i \in \mathbb{K}[X]_{v_i}$, v_i - целочисленный вектор (g_i не обязаны лежать на ребрах).

Пусть $\varphi \in \ker\Phi$.

$$\ker\Phi \subset GL(\mathbb{K}[X]_{v_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{K}[X]_{v_l}) \tag{6.3}$$

Все пространства $\mathbb{K}[X]_{v_i}$ конечномерны.
Конус острый, в его вершине лежат только константы. Элементы $\mathbb{K}[X]$ - это некие многочлены от образующих. Когда мы будем брать многочлены от этих образующих, вектора будут складываться, и многочлены будут уходить достаточно далеко по конусу и не будут попадать в начальные пространства $\mathbb{K}[X]_{v_i}$, поэтому в начальные пространства попадет лишь конечное число мономов.

Вложение (6.3) выполняется в силу следующего. $g_i \in \mathbb{K}[X]_{v_i}$ переходят в $\mathbb{K}[X]_{v_i}$, соответственно, если есть несколько g_i в одной и той же компоненте, то так или иначе индуцируется автоморфизм $\mathbb{K}[X]$. Значит, автоморфизм $\mathbb{K}[X]_{v_i} \mapsto \mathbb{K}[X]_{v_i}$ линейный и на конечномерном векторном пространстве $\mathbb{K}[X]_{v_i}$ порождается линейное отображение, которое переставляет g_i. К этому отображению есть обратное, поэтому получаем $GL(\mathbb{K}[X]_{v_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{K}[X]_{v_l})$.

$\square$

Пример 1.

$$x_1^{d_1} + \ldots + x_n^{d_n} = 0, \quad n \geq 3$$

Это многообразие будет жестким, если d_i достаточно большие, а именно $\sum d_i > \frac{1}{n-2}$.

Пусть, например,

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0 \tag{6.4}$$

Какой максимальный тор действует на этом многообразии? Сразу видно одномерный алгебраический тор T, который умножает x_1, x_2, x_3 на t.
Несложно видеть, что это максимальный тор. Если это не так, то есть еще какой-то, который можно добавить и расширить T, т.е. есть какой-то тор в централизаторе T. Легко убедиться, что не существует тора, который коммутирует с T и действует на нашем многообразии.
Моноид здесь будет выглядеть как все положительные целые точки, потому что в 0 лежат только константы, в 1 лежит линейная оболочка x_1, x_2, x_3, в 2 лежит линейная оболочка всех мономов степени 2 и т.д.
Заметим, что в 3 лежит линейная оболочка всех мономов степени 3, но они не все разные, на них есть соотношение (6.4).

Пусть

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

где C - матрица. Понятно, что этим задан весь автоморфизм X.

Далее, из общей теории, группа автоморфизмов - это конечное расширение тора T. Тогда C может быть только скалярной матрицей, если мы будем рассматривать только связную компоненту. Однако может быть и не диагональной, если x_i переставляются.
Получается, матрица C соответствует тору T и еще какому-то конечному расширению (которое, как минимум, переставляет x_i).

Можно показать, что

$$\mathrm{Aut}(X) \cong S_3 \leftthreetimes \left(\mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}^3 \times \mathbb{K}^\times\right)$$

Пример 2.

$$x_1^3 x_2^2 + y_1^3 y_2^2 + z^3 = 0$$

Сейчас мы не будем доказывать, что рассматривемые многообразия жесткие, пока примем это как факт.

Есть одномерный тор T_1, который действует так: x_1 умножается на t_1^{-2}, x_2 умножается на t_1^3, а на остальный переменных он никак не действует, оставляет их на месте.

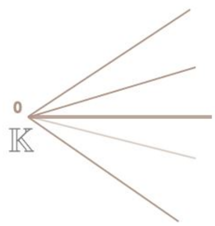
Есть аналогичный тор T_2, который умножает y_1 на t_2^{-2}, умножает y_2 на t_2^3, а остальные переменные оставляет на месте.

Есть тор T_3, который переменные x_1, y_1, z умножает на t_3.

Объединяя T_i, получаем действие трехмерного тора T.

$$\begin{gathered} x_1 \mapsto t_1^{-2}t_3x_1 \\ x_2 \mapsto t_1^3x_2 \\ y_1 \mapsto t_2^{-2}t_3y_1 \\ y_2 \mapsto t_2^3y_2 \\ z \mapsto t_3z \end{gathered}$$

Почему нельзя взять тор, который с T коммутирует? Если такой тор существует, то он должен переводить переменную веса t_1^3 в функцию веса t_1^3.
Покажем, что весовое пространство t_1^3 одномерно и натянуто на x_2. Поэтому если что-то коммутирует с тором T, x_2 переходит в λx_2. Аналогично с остальными.
Это объясняется тем, что конус будет острым, а действие строго острым. Будем иметь трехмерный конус с четырьмя ребрами, соответствующими весам x_1, x_2, y_1, y_2.



Вес z будет внутри конуса (центральный стержень), потому что, например, при x_1 имеем $t_1^{-2}t_3$, а при x_2 t_1^3. Сложив их с нужными коэффициентами, получим просто t_3. То же самое с весами y_i.

Покажем, что действие строго острое. Выпишем в аддитивной записи примитивные вектора на ребрах, соответствующие переменным

$$\begin{gathered} x_1 \leftrightarrow (-2,\ 0,\ 1) \\ x_2 \leftrightarrow (3,\ 0,\ 0) \\ y_1 \leftrightarrow (0,\ -2,\ 1) \\ y_2 \leftrightarrow (0,\ 3,\ 0) \\ z \leftrightarrow (0,\ 0,\ 1) \end{gathered}$$

Чтобы доказать, что конус острый, можно предъявить некий вектор, такой что скалярное произведение всех этих векторов с ним будет строго положительно. Возьмем вектор

$$v = (1,\ 1,\ 3).$$

Понятно, что в нулевой компоненте находятся только константы, т.к. любая функция - это некий многочлен от x_1, x_2, y_1, y_2, z, но у всех этих переменных веса такие, что они дают положительное скалярное произведение с v. Поэтому в нулевую компоненту попадают только тривиальные многочлены.

Из нашего рассмотрения, при условии жесткости X и максимальности тора T, следует, что $\mathrm{Aut}(X)$ - конечное расширение T.

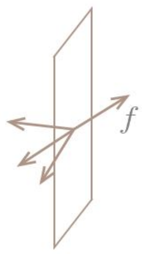
Разница между приведенными примерами в том, что в примере 2 можно с помощью автоморфизма ψ двигать конус. x_1 можно поменять с y_1, и x_2 в это же время поменять с y_2.
Таким образом, конус не всегда неподвижный, но конус всега переходит в конус, а лучи в лучи.

Случай 2. Изолированный полуинвариант

Определение 6.19. *Полуинвариант (относительно некоторого действия это то, что умножается на константу, в случае действия группы тора это то же самое, что и однородный элемент относительно градуировки)* $f \in \mathbb{K}[X]_{i_1,\ldots,i_k}$ *называется изолированным, если*

1) f *- неприводимый элемент алгебры* $\mathbb{K}[X]$,
2) $\alpha(i_1, \ldots, i_k) > 0$,
3) *существует* α *- линейная функция на* $\mathbb{Q}^k$ *такая, что если* g *- неприводимый полуинвариант* $g \in \mathbb{K}[X]_{j_1,\ldots,j_k}$ *и* $\alpha(j_1, \ldots, j_k) > 0$, *то* $g = \lambda f$.

Поясним это определение. У нас есть вес $i_1, \ldots, i_k$ полуинварианта f, линейная функция α с точностью до пропорциональности соответствует гиперплоскости, на которой $\alpha = 0$.
Вес неприводимого полуинварианта отделяется от всех остальных весов с помощью этой гиперплоскости, т.е. на нем $\alpha > 0$, а на всех остальных неприводиых полуинвариантах (не пропорциональных f) $\alpha < 0$.



Заметим, что накладывается условие не только на вес $i_1, \ldots, i_k$, но и на то, как устроено весовое пространство в этой точке.

Теорема 6.7. *Если* $\mathbb{K}[X]$ *порождена изолированными неприводимыми полуинвариантами, то* $\mathrm{Aut}(X)$ *- алгебраическая группа.*

Следствие 6.8. *(Усиление теоремы)*
Если $\mathbb{K}[X]$ *алгебраическая над подалгеброй, порожденной изолированными полуинвариантами, то* $\operatorname{Aut}(X)$ *- алгебраическая группа.*

Доказательство этих утверждений будет позже.

Пример к теореме.

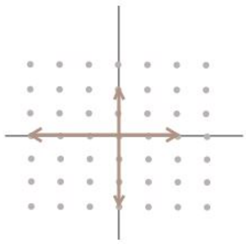
$$x_1^3x_2^2 + y_1^3y_2^2 = 1 \tag{6.4}$$

Покажем, что это многообразие удовлетворяет утверждению теоремы 6.7.

Здесь будет следующтй тор, мы не проверяем его максимальность.

$$\begin{gathered} x_1 \to t_1^2x_1 \\ x_2 \to t_1^{-3}x_2 \\ y_1 \to t_2^2y_1 \\ y_2 \to t_2^{-3}y_2 \end{gathered}$$

Изобразим соответствующие вектора на двумерной решетке



В координатх (x, y) несложно для каждого вектора взять функции, отделяющие вектор от всех остальных.

$$\begin{gathered} x_1 \;\leftrightarrow\; \alpha = x \\ x_2 \;\leftrightarrow\; \alpha = y \\ y_1 \;\leftrightarrow\; \alpha = -x \\ y_2 \;\leftrightarrow\; \alpha = -y \end{gathered}$$

Покажем для x_1, что x - это единственный полуинвариант, для которого $\alpha > 0$. Как может выглядеть элемент, для которого x-координата положительна, т.е. который умножается на t_1 в положительной степени? Из вида (6.4) следует, что если мы хотим получить моном положительной степени по t_1, он должен делиться на x_1.

Обозначим вес через ω. Если $\alpha(\omega(f)) > 0$, то f делится на x_1. Это и доказывает единственность с точностью до пропорциональности.

Получили, что x_1, y_1, x_2, y_2 - изолированные полунварианты, порождающие $\mathbb{K}[X]$.

Пример к следствию.

$$x_1^3x_2^2 + y_1^3y_2^2 + z^3 = 1 \tag{6.5}$$

Тор здесь такой же как в предыдущем примере, изолированными полуинвариантами будут x_1, y_1, x_2, y_2, а z будет веса 0. Здесь мы явно не в случае строго острого действия. Есть даже неприводимая образующая нулевой степени.
Тем не менее $\mathbb{K}[X]$ порождена изолированными полуинвариантами, тогда, по следствию, $\mathrm{Aut}(X)$ - алгебраическая группа.

Лекция 7

Неприводимые изолированные полуинварианты.

Продолжаем разбирать случай неприводимых изолированных полуинвариантов. Напомним определение.

Определение. *f - неприводимый элемент $f \in \mathbb{K}[X]$. Пусть X - жесткое, $\mathbb{T}$ - максимальный тор в $\mathrm{Aut}(X)$, $\dim \mathbb{T} = m$.*
Тогда f называется изолированным полуинвариантом, если $\forall t \in \mathbb{T}$ верно $t \cdot f = \lambda f$ и $\exists$ линейная $\alpha : \mathbb{Q}^m \mapsto \mathbb{Q}^m$ такая, что $\alpha(\omega(f)) > 0$ и $\forall$ g - неприводимого полуинварианта, такого что g не пропорционален f, выполнено $\alpha(\omega(f)) \leq 0$.
$\mathbb{Q}^m$ - рациональное пространтство, натянутое на группу характеров тора $\mathbb{Q}^m = \chi(\mathbb{T}) \otimes \mathbb{Q}$.

Пример.

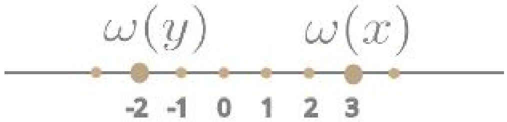
$$X = \{x^2y^3 = z^5 + 1\} \tag{7.1}$$

Считая, что X жесткое (докажем позже), определим, какие у него есть полуинварианты.
Одномерным тором можно подействовать так

$$\begin{cases} x \mapsto t^3x \\ y \mapsto t^{-2}y \\ z \mapsto z \end{cases}$$

Это будет максимальный тор (пока тоже не доказываем).

Тогда $\omega(x) = 3$, $\omega(y) = -2$, λx и λy - неприводимые полуинварианты. z также является неприводимым полуинвариантом веса 0, но он не изолированный.



Покажем, что все неприводимые полуинварианты - это только λx и λy. Любая функция на X - это многочлен от x, y, z. Возьмем в этом многочлене некий моном $x^a y^b z^c$. В терминах градуировки

$$\deg x^a y^b z^c = 3a - 2b.$$

Если весь многочлен претендует быть неприводимым полуинвариантом, то он должен быть хотя бы просто полуинвариантом, т.е. однородным. Соответственно, на интересуют такие многочлены, у которых степени всех мономов одинаковы и не

равны 0.
Заметим, что уравнение (7.1) однородное, поэтому степень оно не меняет.

Если $3a - 2b > 0$, то $a > 0$. Это значит, что x в моном точно входит, и это верно для любого монома. Тогда если есть однородный многочлен f с $\deg f > 0$, то отсюда следует, что $f(x, y, z)$ делится на x.
Если теперь f неприводимый, то $f = \lambda x$.

Аналогично, если $\deg f < 0$, то $f(x, y, z)$ делится на y, откуда, если f неприводимый, $f = \lambda y$.

Итак, любой неприводимый полуинвариант ненулевого веса есть либо λx, либо λy. Значит, эти два полунварианта изолированные.
Есть очевидные функции α, которые их отделяют. Пусть s - координата, тогда для x $\alpha = s$, для y $\alpha = -s$.

Нужно пояснить еще одну вещь, связанную с неприводимостью: что будет, если разложить x или y на множители. Если разложим x на множители, то т.к. $\deg x = 3$, то один из множителей тоже будет положительной степени, а тогда $f(x, y, z)$ делится на x. То же самое с y.

Доказательство жесткости многообразия и максимальности тора.

Докажем теорему 6.7 и следствие 6.8. Напомним формулировку.

Теорема. *Если $\mathbb{K}[X]$ порождается неприводимыми изолированными полуинвариантами, то $\operatorname{Aut}(X)$ - алгебраическая группа.*

Следствие. *Если $A \subset \mathbb{K}[X]$ - подалгебра, A порождается изолированными полуинвариантами и $\mathbb{K}[X]$ алгебраическая над A, то $\operatorname{Aut}(X)$ - алгебраическая группа.*

Сначала вернемся к нашему примеру.

Покажем, что многообразие жесткое.

Доказательство. От противного: пусть X не жесткое.
На прошлой лекции была доказана Лемма 5.7., из которой следовало следующее:
Если X не жесткое, то существует однородное ненулевое LND (крайняя компонента в рахложении какого-то ненулевого).

Пусть δ - однородное ненулевое LND.

$\deg \delta \geq 0$. Напомним, что степень дифференцирования - это то, на сколько оно сдвигает градуировку.

Тогда $\deg \delta(x) > 0$, т.к. степень x была 3 и мы ее сдвинули в положительную сторону. Отсюда $\delta(x)$ делится на x, что может быть только если $\delta(x) = 0$.

Аналогично, если $\deg \delta \leq 0$, то $\delta(y)$ делится на y, откуда $\delta(y) = 0$.

1) Если $\deg \delta = 0$, то мы попадаем в оба случая и

$$\delta(x^2y^3) = 0 = P'(z)\delta(z) = \delta(P(z)), \quad P(z) = z^5 + 1.$$

Тогда

$$\delta(z) = 0 \;\Rightarrow\; \delta \equiv 0.$$

Т.о., $\deg \delta$ не может быть равна 0.

2) Пусть теперь $\deg \delta > 0$. Тогда $\delta(x) = 0$,

$$\deg \delta(y) = -2 + \deg \delta.$$

- $\deg \delta < 2, \quad \deg \delta(y) < 0 \;\Rightarrow\; \delta(y) = 0.$
- $\deg \delta > 2$. В таком случае $\delta(y)$ делится на x, т.к. тогда $\deg \delta(y) > 0$, а положительная степень возникает только от x. $\delta(z)$ также делится на x, т.к. $\deg \delta(z)$ стала положительной.
  Отсюда $\delta(f(x, y, z))$ тоже делится на x и можно рассмотреть дифференцирование $\frac{\delta}{x}$ - корректно определенное LND.

  $$\deg(\frac{\delta}{x}) = \deg \delta - \deg x = \deg \delta - 3.$$

  Таким образом, мы можем последовательно уменьшать степень δ, пока она не станет меньше 2(этот случай разобран) или равна 2 (этот случай рассмотрим подробнее).
- $\deg \delta = 2$. Тогда $\delta(z)$ должно стать степени 2. Взять положительную степень можно только от x, но $\deg x = 3$, поэтому если некий моном имеет степень 2, то он обязан делиться не только на x, но и на y.
  На самом деле, единственный способ набрать степень 2 - это x^2y^2. Итак, $\delta(z)$ делится на x^2y^2.
  Т.к. $\deg \delta(y) = 0$,
  $$\delta(y) = F(z, x^2y^3) = F(z).$$
  При этом $\delta(F(z)) = F'(z)\delta(z)$ делится на y.
  Получили, что $\delta(F(z))$ делится на y и $\delta(y)$ делится на $F(z)$.
  По свойствам LND либо $\delta(y) = 0$ (тогда $\delta \equiv 0$), либо $\delta(F(z)) = 0$ (тогда $\delta(z) = 0$).

  Итак, $\delta(x) = 0, \; \delta(z) = 0, \; x^23y^2\delta(y) = 0 \;\Rightarrow\; \delta \equiv 0.$

3) Случай $\deg \delta < 0$ разбирается аналогично. $\delta(y) = 0$.
   - Если $\deg \delta > -3$, то $\deg \delta(x) > 0 \Rightarrow \delta(x)$ делится на x, откуда $\delta(x) = 0$.
   - Если $\deg \delta < -3$, то $\delta(x)$ делится на y, $\delta(z)$ тем более делится на y и можно перейти от δ к $\frac{\delta}{y}$.
   - $\deg \delta = -3$. Тогда $\deg \delta(z) = -3$, снова, набрать -3 только с помощью y нельзя, поэтому $\delta(z)$ делится на x.

   $$\delta(x) = F(z),$$

   $\delta(F(z))$ делится на x, и снова имеем 2 случая: либо $\delta(x) = 0$, либо $\delta(F(z)) = 0$.

Итак, мы разобрали все случаи и показали, что X жесткое. $\square$

Таким же образом можно рассматривать любую триномиальную поверхность

$$T_{01}^{l_{01}} \dots T_{0k_0}^{l_{0k_0}} + T_{11}^{l_{11}} \dots T_{1k_1}^{l_{1k_1}} + T_{21}^{l_{21}} \dots T_{2k_2}^{l_{2k_2}} = 0.$$

Если это многообразие жесткое, то схема доказательства такая же.

Упражнение 7.2. *Показать, что многообразие*

$$x^2y^3 + z^2w^2 + 1 = 0$$

жесткое.

Покажем, что тор максимальный.

Доказательство. Пусть $\mathbb{K}^\times$ - не максимальный тор, тогда существует еще одно $\mathbb{K}^\times$-действие, коммутирующее с данным.

У нас есть однородная компонента, соответствующая первому дифференцированию, степени 3 $\mathbb{K}[X]_3$. Она выглядит следующим образом $\mathbb{K}[X]_3 = \{xP(z)\}$. В ней есть единственный с точностью до пропорциональности неприводимый элемент λx.

Если теперь есть другое $\mathbb{K}^\times$-действие, то, во-первых, оно должно сохранять компоненту $\mathbb{K}[X]_3$, т.к. эти два действия коммутируют, а во-вторых, оно должно неприводимый элемент переводить в неприводимый элемент.
При втором $\mathbb{K}^\times$-действии $x \mapsto \lambda x$.

Аналогично, если рассмотреть компоненту $\mathbb{K}[X]_{-2}$, получим $y \mapsto \mu y$.

Тогда

$$x^2y^3 \mapsto \lambda^2\mu^3x^2y^3.$$

Нужно перевести z в какой-то многочлен $f(z)$, потому что его степень должна остаться нулевой, так, чтобы многочлен z^5-1 перешел в многочлен

$$z^5-1 \mapsto f^5(z)-1 = \lambda^2\mu^3(z^5-1).$$

Понятно, что такое может быть только при $\lambda^2\mu^3=1$, а это как раз действие нашего тора.
Таким образом, любое $\mathbb{K}^\times$-действие, которое коммутирует с нашим тором, совпадает с ним, а значит тор является максимальнымю. □

Мы доказали, что X жесткое, тор максимальный, тогда из теоремы 6.7 и следствия 6.8 следует, что группа автоморфизмов многообразия $X=\{x^2y^3=z^5+1\}$ является алгебраической.

В нашем случае несложно выписать группу автоморфизмов явно.
Пусть $\varphi \in \operatorname{Aut}\mathbb{K}[X]$, тогда он индуцирует автоморфизм $\psi \in \operatorname{Aut} P$, где P - это моноид весов. В нашем случае $P=\mathbb{Z}$, потому что -2 и 3 порождают все целые числа.

Какие автоморфизмы у $\mathbb{Z}$? Либо оставляющий все на месте ($x\mapsto x$), либо переворачивающий ($x\mapsto -x$).
Понятно, что при этом веса изолированных полуинвариантов должны переходить в веса изолированных полуинвариантов. При автоморфизме $x\mapsto -x$ -2 и 3 не совпадут, значит, $\psi=\mathrm{id}$.
Также изолированный полуинвариант должен переходить в изолированный полуинвариант, т.е. $x\mapsto \lambda x,\ y\mapsto \mu y$. Далее повторяем рассуждение о том, что тогда нужно λ и μ согласовать, чтобы $\lambda^2\mu^3=1$, тогда снова получим наш тор. Отсюда

$$\operatorname{Aut}(X)\cong\mathbb{K}^\times.$$

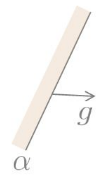
Переходим к доказательству теоремы и следствия.

Доказательство теоремы о порождении неприводимыми изолированными полуинвариантами.

Лемма 7.9. *Количество изолированных полуинвариантов конечно с точностью до пропорциональности.*

Доказательство. $\mathbb{K}[X]$ - конечно порождена, откуда у $\mathbb{K}[X]$ существует конечная система из $\mathbb{T}$-однородных порождающих.
Значит, существует конечная система порождающих алгебры $\mathbb{K}[X]$, состоящая из неприводимых $\mathbb{T}$-однородных элементов.

В этой системе содержатся (с точностью до пропорциональности) все изолированные полуинварианты. Изобразим изолированный полуинвариант g, все остальные неприводимые полуинварианты лежат в другом замкнутом полупространстве.



Утверждается, что для какой-то из образующих α должна быть положительной, иначе мы не сможем получить эелемент справа от гиперплоскости.
Существует порождающий f такой, что $\alpha(f) > 0$, тогда $f = \lambda g$, потому что f - тоже неприводимый $\mathbb{T}$-однородный элемент, и для него $\alpha > 0$.

□

Лемма 7.10. *Пусть $f_1, \ldots, f_k$ - все (с точностью до пропорциональности) изолированные полуинварианты.*
Тогда $\forall \varphi \in \mathrm{Aut}(X)$ выполнено

$$\varphi(f_i) = \lambda_i f_{\sigma(i)},$$

для некоторых чисел λ_i и некоторой перестановки σ.

Доказательство. Изолированный полуинвариант должен переходить в изолированный полуинвариант, а изолированные полуинварианты у нас есть только пропорциональные f_i. Поэтому $f_i \mapsto \lambda_i f_{\sigma(i)}$.
Поскольку наше отображение - автоморфизм, два не пропорциональных не могут перейти в пропорциональные, соответственно, индекс должен быть именно перестановкой, чтобы два разных полуинварианта не перешли в один. □

Таком образом, имеем следующий гомоморфизм

$$\Phi: \ \mathrm{Aut}(X) \mapsto S_k$$

$$\varphi \mapsto \sigma$$

При умножении автоморфизмов берется композиция подставновок.

Доказательство теоремы 6.7.

Доказательство. Рассмотрим $\ker \Phi$. Если $\varphi \in \ker \Phi$, то

$$\phi(f_i) = \lambda_i f_i.$$

Можно $\ker \Phi$ инъективно вложить в тор $(\mathbb{K}^\times)^k$

$$\varphi \mapsto (\lambda_1, \ldots, \lambda_k).$$

Легко видеть, что при композиции автоморфизмов λ_i перемножаются.

Получается, $\ker \Phi$ - подгруппа в торе, а подгруппа в торе - это некоторый меньший тор $\ker \Phi \cong (\mathbb{K}^\times)^m \times F$, F - конечная абелева группа (получили квзитор).

Поскольку алгебра $\mathbb{K}[X]$ порождена f_i, то поняв, как изеняются f_i, мы поймем, как устроен гомоморфизм Φ.

Получается, что мы имеем гомоморфизм из группы автоморфизмов в конечную группу, а его ядро - это конечное расширение тора. Отсюда и вся группа автоморфизмов - это конечное расширение тора. □

Доказательство следствия 6.8.

Доказательство. Пусть $\mathbb{K}[X] \supset A$ - подалгебра, порожденная $f_1, \ldots, f_k$.
Тогда в группе $\mathrm{Aut}(A)$ все будет ровно как в теореме 6.8.

$$\Phi: \ \mathrm{Aut}(A) \mapsto S_k, \quad \ker \Phi \cong (\mathbb{K}^\times)^m \times F$$

Осталось понять, насколько отличаются автоморфизмы X от автоморфизмов A. Утверждается, что A - инвариантная подалгебра, она натянута на все изолированные полуинварианты, изолированные полуинварианты переходят в изолированные полуинварианты, значит, подалгебра сохранятеся. Значит, есть гомоморфизм

$$\Psi: \ \mathrm{Aut}(X) \mapsto \mathrm{Aut}(A).$$

По аналогии с теоремой 6.7 можно показать, что $\mathrm{Aut}(A)$ - конечное расширение тора. Осталось разобраться с тем, что из себя представляет $\ker \Psi$.

Покажем, что $\ker \Psi$ конечно. Пусть $\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}[h_1, \ldots, h_s]$, h_i - корень многочлена с коэффициентами из A ($\mathbb{K}[X]$ алгебраическая над A).

Если $\psi \in \ker \Psi$, то ψ оставляет коэффициенты на месте. Следовательно, есть конечное количество возможностей для $\psi(h_i)$. □

Применяя следствие к нашему примеру (7.1), получаем, что $\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}[x, y, z]$ - алгебраическая над $\mathbb{K}[x, y]$.

Инвариант Макар-Лиманова алгебры $\mathbb{K}[A]$.

Определение 7.20. *Инвариант Макар-Лиманова алгебры $\mathbb{K}[X]$ (многообразия X) $\mathrm{ML}(X)$ - это*

$$\bigcap_{\delta \in LND} \ker \delta.$$

Увеpждение 7.5. $\mathrm{ML}(X)$ - *подалгебра в* $\mathbb{K}[X]$.

Это следует из того, что каждое из ядер - это подалгебра. Если δ от одного элемента равно нулю и δ от другого элемента равно нулю, то δ от их произведения равно нулю по тождеству Лейбница. Значит, $\ker \delta$ - подалгебра.

Увеpждение 7.6. $\mathrm{ML}(X)$ *факториально замкнуто* ($ab \,\mathrm{Im}\, \mathrm{ML}(X) \Rightarrow \ a \,\mathrm{Im}\, \mathrm{ML}(X), \ b \,\mathrm{Im}\, \mathrm{ML}(X)$).

Это снова свойство не только ML, но и ядра любого дифференцирования. Если степенная функция от произведенеия равна нулю, то она и от каждого сомножителя равна нулю.

Пример.

$$\mathrm{ML}(\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]) = \mathbb{K}$$

Это следует из того, что есть частные дифференцирования $\frac{\partial}{\partial x_i}$

$$\ker \frac{\partial}{\partial x_i} = \mathbb{K}[x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n]$$

Если такие алгебры пересечь, то получатся только константы.

Пример.

Если X жесткое, то $\mathrm{ML}(X) = \mathbb{K}[X]$.
Это следует из того, что единственное дифференцирование здесь - тождественно нулевое.

Конструкция ML быа введена для частичного доказательства проблемы линеаризации.

Напоминание: проблема линеаризации тора состоит в следующем. Если есть действие тора на аффинном пространстве, правда ли, что оно линейно?

Если $T \curvearrowright \mathbb{A}^n$, то оно точно линейно, если $\dim T = n, \ \dim T = n-1$.

Самый простой случай $\mathbb{K}^\times \curvearrowright \mathbb{A}^3$ - любое такое действие эквивалентно линейному. Этот результат был получен Корасом и Расселом. Действовали торами на неких трехмерных многобразиях, часть их которых были хорошими, а часть плохими. Доказывалось, что все плохие не изоморфны $\mathbb{A}^3$.
Самым сложным случаем было многообразие, заданное следующим уравнением (Кубика Кораса-Рассела)

$$\{x + x^2y + z^2 + t^3 = 0\} = X.$$

Никакие известные на тот момент инварианты не разделяли кубику и аффинное пространство, и тогда был введен инвариант Макар-Лиманова.

$$\mathrm{ML}(X) = \mathbb{K}[x] \neq \mathbb{K}$$

Мы более подробно рассмотрим другую проблему - проблему сокращения, которая тесно связана с поверхностями Данилевского.

Поверхности Данилевского.

Поверхности Данилевского задаются следующим уравнением

$$D_n = \{x^n y = P(z)\},$$

где $P(z)$ - это некий многочлен, и можно считать $\deg P(z) \geq 2$ и $P(z) = z^d + a_{d-2}z^{d-2} + \ldots + a_0$.

Есть две возможности: $n = 1$ и $n \neq 1$, и они принципиально отличаются с точки зрения инварианта Макар-Лиманова.

Замечание. Инвариант Макар-Лиманова называется инвариантом, потому что он не меняется при изоморфизмах.

Покажем, что

$$\mathrm{ML}(D_1) = \mathbb{K}.$$

Нужно предъявить несколько дифференцирований так, чтобы пересечение их ядер уже равнялось только константам.

Возьмем

$$\delta_x(y) = 0, \quad \delta_x(z) = y, \quad \delta_x(x) = P'(z)$$
$$\delta_y(x) = 0, \quad \delta_y(z) = x, \quad \delta_y(y) = P'(z)$$

Легко понять, что они локально нильпотентные.
Также легко видеть, что для

$$xy = P(z) \tag{7.4}$$

дифференцирование от левой части равно дифференцированию от правой части.

$$\ker \delta_x = \mathbb{K}[y] \tag{7.2}$$

$$\ker \delta_y = \mathbb{K}[x] \tag{7.3}$$

$$\mathbb{K}[y] \cap \mathbb{K}[x] = \mathbb{K}$$

Покажем, что (7.2) и (7.3) выполняются.

Степень трансцендентности у ядра должна быть на 1 меньше, чем размерность многообразия (у нас это 2).

$\mathbb{K}[x]$ - одномерная алгебра, которая лежит в $\ker \delta_y$.

Осталось пояснить, что она алгебраически замкнута.
Чтобы не повысить степень трансцендентности, можно добавить что-то алгебраическое над $\mathbb{K}[y]$. Соотношение (7.4) содержит все 3 переменные, поэтому нет ничег алгебраического над $\mathbb{K}[y]$.

Далее докажем, что

$$\operatorname{ML} D_n = \mathbb{K}[x], \quad n \geq 1,$$

откуда будет следовать

$$D_1 \ncong D_n, n \geq 1.$$

Однако контрпример к обобщенной гипотезе сокращения утверждает, что

$$D_1 \times \mathbb{K} \cong D_n \times \mathbb{K}.$$

Лекция 8

Описание группы автоморфизмов не жесткого многообразия.

Пусть
$$\{xy^2 = P(z)\} = Y.$$
В этой лекции рассмотрим класс многообразий, который обобщает поверхность Y. И явно вычислим $\operatorname{Aut}(Y)$.

Многообразие Y не является жестким, а значит группа его автоморфизмов не является алгебраической. Идея ее описания заключается в разбиении не несколько не алгебраических, но все же обозримых подгрупп.

Рассмотрим следующую гиперповерхность
$$Y = \{xy_1^{k_1}\dots y_m^{k_m} = P(z)\} \subset \mathbb{A}^{m+2}, \ \ k_i \geq 2, \ \ d = \deg P(z) \geq 2,$$
где $x, y_1, \dots, y_m, z$ - некие переменные, $\dim Y = m+1$, $P(z) = z^d + c_{d-2}z^{d-2} + \ldots + c_0$.

Сначала определим некоторое количество подгрупп, которые действуют на Y.

1) Если среди k_i есть одинаковые, то можно переставлять y_i и y_j (если $k_i = k_j$). Тогда имеем симметрическую группу Y
$$S(Y) = S_{m_1} \times \ldots \times S_{m_l}, \ \ \sum m_j = m,$$
где $m_1, \dots, m_l$ - количества k_i, которые совпадают.
Другими словами, $S(Y)$ - это стабилизатор в группе S_n монома $y_1^{k_1}\dots y_m^{k_m}$.

2) Также есть m-мерный тор, который действует на Y. Возьмем тор, который действует на $\mathbb{K}[x, y_1, \dots, y_m]$ следующим образом
$$\begin{gathered} x \mapsto t_{m+1}x \\ y_1 \mapsto t_1 y_1 \\ \vdots \\ y_m \mapsto t_m y_m \end{gathered}$$
В алгебре многочленов $\mathbb{K}[x, y_1, \dots, y_m]$ лежит моном $xy_1^{k_1}\dots y_m^{k_m}$. Обозначим
$$\mathbb{T} = St(xy_1^{k_1}\dots y_m^{k_m}). \tag{8.1}$$
Можно показать устройство этого тора более явно.
$$xy_1^{k_1}\dots y_m^{k_m}$$

$$\begin{gathered} y_1 \mapsto s_1 y_1 \\ \vdots \\ y_m \mapsto s_m y_m \end{gathered}$$

Чтобы компенсировать эти действия, действие на x должно быть следующим

$$x \mapsto s_1^{k_1} \dots s_m k^m x$$

Полученый тор никак не сдвигает моном $xy_1^{k_1} \dots y_m^{k_m}$, на z он действует тривиально, значит, уравнение целиком он также не сдвигает.

Будем называть (8.1) каноническим тором многообразия X. Это уже всегда нетривиальная подгруппа. Если есть хотя бы один y, то получим хотя бы одномерный тор.

3) Определим действие одномерного тора не сразу на нашем многообразии, а сначала на неком объемлющем аффинном пространстве.

$$\begin{gathered} x \mapsto t^d x \\ y_i \mapsto y_i \\ z \mapsto tz \end{gathered}$$

Вообще говоря, такое преобразование не сохраняет наше многообразие, потому что P становится другим.
Левая часть просто умножается на t^d.

$$\begin{gathered} P(z) = z^d + c_{d-2} z^{d-2} + \dots + c_0 \\ z^d \mapsto t^d z \\ z^{d-2} \mapsto t^{d-2} z^{d-2} \\ \vdots \\ c_0 \mapsto c_0 \end{gathered} \tag{8.2}$$

Видно, что если $P(z)$ произвольный, то он не сохраняется.
Однако для специфического вида z либо весь тор, либо его часть (для каких-то конкретных t) действует так, что весь многочлен $P(z)$ умножается на t^d.

Например, такое может быть, если членов $c_{d-2} z^{d-2} + \dots + c_0$ нет.
Еще один случай
$$P(z) = z^u Q(z^v).$$

Тогда утверждается, что если $t = \sqrt[v]{1}$, то $t \cdot P(z) = t^d P(z)$.
Действительно, z^v переходит само в себя, поэтому $Q(z^v)$ остается на месте. z^u умножается на t^u, при этом $u \equiv d (\mod v)$, поэтому то, что многочлен $P(z)$ умножается на t^u для $t = \sqrt[v]{1}$ равносильно умнржению на t^d.

Преобразование (8.2) умножает правую и левую часть уравнения на одно и то же в двух случаях: либо когда $P(z) = z^d$, и это дает некий дополнительный

тор, либо когда $P(z) = z^u Q(z^v)$, и это дает конечную группу $\mathbb{Z}_v$.
Так или иначе, будем называть эти объекты $\mathbb{D}$ - дополнительный квазитор.

Более строго: мы действуем на объемлющем пространстве (8.2) и, по аналогии с предыдущими случаями, рассматриваем стабилизатор $St(Y)$ (это значит, что мы рассматриваем те элементы, которые уравнение переводят в пропорциональное ему).

4) Введем теперь большую подгруппу, исходя из условия, что X не является жестким. Проследим, что оно не являтся жестким, и предъявим нетривиальное LND. LND предъявляется примерно так же, как для поверхности Данилевского.

$$\begin{cases} \hat{\delta}(x) = P'(z) \\ \hat{\delta}(y_i) = 0 \\ \hat{\delta}(z) = y_1^{k_1} \dots y_m^{k_m} \end{cases}$$

Проверка корректности

$$\hat{\delta}(xy_1^{k_1} \dots y_m^{k_m}) = \hat{\delta}(x) y_1^{k_1} \dots y_m^{k_m} = P'(z) y_1^{k_1} \dots y_m^{k_m}$$

$$\hat{\delta}(P(z)) = P'(z)\hat{\delta}(z) = P'(z) y_1^{k_1} \dots y_m^{k_m}$$

Получили, что дифференцирование от левой части уравнения равно дифференцированию от правой части.

Легко видеть, что $\hat{\delta} \in LND$.

С каждым LND можно связать подгруппу в группе автоморфизмов.
Обычно дифференцированию δ мы сопоставляли подгруппу в группе автоморфизмов, изоморфную аддитивной группе поля, а именно

$$\delta \to \{\exp s\delta \mid s \in \mathbb{K}\}.$$

Но этому же дифференцированию δ можно сопоставить гораздо большую группу.
$\mathbb{U}(\delta)$ - большая унипотентная подгруппа, соответствующая δ.

$$\mathbb{U}(\delta) = \{\exp f\delta \mid f \in \ker \delta\}$$

Эта подгруппа уже большая в том смысле, что она не алгебраическая.

Утверждается, что $\mathbb{U}(\delta) \cong (\ker \delta, +)$.
Действительно,

$$\exp(f\delta)\exp(g\delta) = \exp(f+g)\delta,$$

тут мы используем, что $f\delta$ и $g\delta$ коммутируют, что правда, т.к. f и g лежат в $\ker \delta$.

С другой стороны, ядро дифференцирования имеет степень трансцендентности на 1 меньше, чем размерность многообразия.
$\dim Y = m+1 \quad \Rightarrow$ степень трансцендентности $\ker\delta = m$. Поскольку мы считаем $m \geq 1$, $(\ker\delta, +)$ - бесконечномерное векторное пространство.

Итак, мы определили следующие подгруппы

$$S(Y),\ \ \mathbb{T},\ \ \mathbb{D},\ \ \mathbb{U}(\hat{\delta})$$

Теперь наша цель - показать, что других нет, то вся группа автоморфизмов порождается этими четырьмя подгруппами.

Понятно, что если взять другое LND, то ему можно поставить другую большую унипотентную подгруппу. Значит, чтобы не было других унипотентных подгрупп, не должно быть других дифференцирований.
Понятно, что мы можем брать $f\hat{\delta}$, где $f \in \ker\hat{\delta}$. Тогда $\mathbb{U}(f\hat{\delta}) \subset \mathbb{U}(\hat{\delta})$.

Докажем, что нет других дифференцирований, кроме $f\hat{\delta}$ (такое многообразие называется почти жестким).

Определение 8.21. *Многообразие X называется почти жестким, если существует такое $\hat{\delta} \in LND(\mathbb{K}[X])$, что любое LND на $\mathbb{K}[X]$ имеет вид*

$$f\hat{\delta},\quad f \in \ker\hat{\delta}.$$

Теорема 8.8. *Y - почти жесткое многообразие.*

На самом деле, мы будем доказывать немного более сильное утверждение. В определении говорится о существовании дифференцирования, мы же покажем, что именно то дифференцирование $\hat{\delta}$, которое мы определили, подходит.

Лемма 8.11.

$$\mathrm{ML}(Y) = \mathbb{K}[y_1, \ldots, y_n]$$

Доказательство. Здесь будем использовать ранее определенную подгруппу $\mathbb{T}$, а точнее его подторы. Подторы будем брать размерности 1, действующие следующим образом:
y_j умножается на t (для конкретного j), x умножается на t^{-k_j}, на остальных переменных действие тривиально.
Понятно, что такое действие сохраняет моном и является действием на нашем многообразии.

Также можно рассматривать утверждение с точки зрения $\mathbb{Z}$-градуировки (т.к. $\mathbb{Z}$-градуировкам соответствуют действия одномерного тора). Градуировка получается следующая

$$\begin{gathered}\deg x = -k_j\\ \deg y_j = 1\\ \deg y_i = 0,\ \ i \neq j\\ \deg z = 0\end{gathered} \tag{8.3}$$

Пусть $\delta \in LND(\mathbb{K}[Y])$. Разложим его на однородные по нашей градуировке.

$$\delta = \sum_{i=l}^{n} \delta_i$$

По Лемме 5.7, $\delta_l \in LND(\mathbb{K}[Y])$.

Докажем, что $l \geq 0$.
От противного: пусть $l < 0$. Тогда

$$\deg \delta_l(x) = \deg x + l = -k_j + l < 0$$

x - единственная образующая с отрицательной степенью, откуда $\delta_l(x)$ делится на x. Тогда по свойству LND $\delta_l(x) = 0$.

Далее воспользуемся следующим: если что-то лежит в ядре, то можно включить его в поле. Возьмем поле

$$\mathbb{L} = \overline{\mathbb{K}(X)}.$$

Утверждается, что δ дает LND на многообразии

$$\{y_1^{k_1} \dots y_j^{k_j} \dots y_m^{k_m} = P(z)\} = W,$$

т.к. можно сделать замену $y_1 \mapsto y_1 \sqrt[k_1]{x}$.

Докажем вложенную лемму.

Лемма 8.12. *W - жесткое многообразие.*

Доказательство. Рассмотрим такую градуировку

$$\begin{gathered}\deg y_1 = -k_2 \\ \deg y_2 = k_1 \\ \deg y_j = 0,\ j \geq 3 \\ \deg z = 0\end{gathered}$$

и проведем те же рассуждения, что и в рассуждении теоремы 8.8. Возьмем LND, разложим его в сумму однородных, рассмотрим крайнюю компоненту (однородное LND). Ее степень должна быть либо положительной, либо нулевой, либо отрицательной.
Если $\deg \delta \geq 0$, то $\delta(y_2) = 0$.
Если $\deg \delta < 0$, то $\delta(y_1) = 0$.

Так или иначе, но одной из этих двух переменных $\delta = 0$.

Аналогично для любой другой пары, поэтому получается, что $\delta = 0$ почти на всех y_j, кроме, возможно, одного. Отсюда

$$\exists\, !\, y_j \ :\ \delta(y_j) \neq 0.$$

Те элементы, на которых $\delta = 0$, присоединяем к полю и приходим к тому, что

$$y_j^{k_j} = P(z).$$

Нас интересует доказательство того, что такое многообразие является жестким. Наш случай - кривая, а кривая не является жесткой только если она является прямой.
Может случиться, что эта кривая приводима, но тогда она тем более жесткая, потому что у всех неприводимых компонент есть общая точка. Эту точку нельзя сдвинуть с помощью автоморфизма, а это значит, что на каждой прямой есть неподвижная точка и никаких G_a-действий быть не может.
Если $y_j^{k_j} = P(z)$ неприводима, нужно воспользоваться стандартной техникой доказательства, что это не прямая. □

δ - LND, на многообразии Y оно не равно нулю, тогда, поскольку $\delta(x) = 0$, получаем, что δ будет давать некоторое ненулевое дифференцирование на многообразии W. Но W - жесткое, значит, на нем нет ненулевых дифференцирований. Противоречие.
Тогда из Леммы 8.12 следует, что $l \geq 0$. Отсюда

$$\deg \delta(y_j) = \deg y_j + l = l + 1 > 0$$

$\delta(y_j)$ делится на y_j, следовательно, $\delta(y_j) = 0$. Это именно то, что мы хотим доказать в Лемме 8.11.
Действительно, т.к. j - любое,

$$\mathbb{K}[y_1, \ldots, y_m] \subset \ker \delta \;\Rightarrow\; \mathbb{K}[y_1, \ldots, y_m] \subset \mathrm{ML}(Y).$$

Обратное включение очевидно, т.к. $\ker \hat{\delta} = \mathbb{K}[y_1, \ldots, y_m]$. Понятно, что пересечение всех ядер LND не больше, чем одно из этих ядер, откуда $\mathrm{ML}(Y) \subset \ker \hat{\delta}$.
Наконец,

$$\mathrm{ML}(Y) = \mathbb{K}[y_1, \ldots, y_m].$$

□

Доказательство теоремы 8.8.

Доказательство. Воспользуемся градуировкой (8.3). Рассмотрим некоторое LND $\delta = \sum_{i=l}^{k} \delta_i$, $\deg \delta_l > 0$ (это уже было показано). Равенства быть не может, т.к. если $\deg \delta_l = 0$, то $\deg \delta(x) < 0$, откуда $\delta(x)$ делится на x. Можно утверждать даже что

$$\deg \delta_k \geq k_j,$$

потому что $\deg \delta(x)$ должна быть неотрицательной, при этом $\deg \delta_l(x) = -k_j + l$.
Пусть $i \geq l \geq k_j$, тогда

$$\deg \delta_i(z) \geq k_j.$$

Это значит, что $\delta_i(z)$ делится на $y_j^{k_j}$. Из этого рассуждения следует, что $\delta_i(z)$ делится на $y_1^{k_1} \ldots y_m^{k_m}$.

Если это выполнено для всех δ_i, а δ - это их сумма, то $\delta(z)$ делится на $y_1^{k_1}\dots y_m^{k_m} = \hat{\delta}(z)$.

Получили, что

$$\delta(z) = f\hat{\delta}(z),$$

$$0 = \delta(y_j) = f\hat{\delta}(y_j) = 0,$$

$$\delta(x) = \delta\left(\frac{P(z)}{y_1^{k_1}\dots y_m^{k_m}}\right) = \frac{\delta(P(z))}{y_1^{k_1}\dots y_m^{k_m}} = \frac{P'(z)f\hat{\delta}(z)}{y_1^{k_1}\dots y_m^{k_m}} =$$

$$= f\frac{P'(z)\hat{\delta}(z)}{y_1^{k_1}\dots y_m^{k_m}} = f\hat{\delta}(x).$$

Таким образом, мы показали, что $\delta = f\hat{\delta}$. Из того, что δ - LND следует, что $f \in \ker\hat{\delta}$. Любое дифференцирование - реплика $\hat{\delta}$. □

Мы поняли, как устроены LND на Y, что дает

$$\mathbb{U}(\hat{\delta}) \triangleleft \mathrm{Aut}(Y),$$

потому что эта подгруппа содержит все экспоненты LND. Если сопрячь экспоненту LND, получится экспонента LND.

Теорема 8.9. *Пусть $\psi \in \mathrm{Aut}(Y)$. Тогда $\forall j, 1 \le j \le m$, $\exists\ 1 \le p \le m$ и $\lambda \in \mathbb{K}^\times$ такие, что*

$$\psi(y_j) = \lambda y_p.$$

Т.е. при автоморфизме y_i могут только переставляться и умножаться на ненулевые константы.

Лемма 8.13. *Пусть $\mathbb{K}^\times \cong \Lambda \in \mathrm{Aut}(Y)$.*
Тогда $\forall\ \varphi \in \Lambda$ выполнено

$$\varphi(y_j) = \lambda y_j, \quad \lambda \in \mathbb{K}^\times.$$

Доказательство леммы.

Доказательство. Пусть δ - полупростое дифференцирование, соответствующее Λ. Используем градуировку (8.3).

$$\delta = \sum_{i=l}^{k} \delta_i.$$

Если $l < 0$, то $\delta_l - LND(\mathbb{K}[Y])$, получаем однородное LND с отрицательной степенью, а мы уже показывали, что такого быть не может.
Значит, $l \ge 0$. Рассмотрим $\delta(y_j) = \sum \delta_i(y_j)$, где $i \ge 0$, тогда $\deg\delta_i(y_j) > 0$, откуда $\delta_i(y_j)$ делится на y_j.
Это означает, что $\delta(y_j)$ делится на y_j.

Тогда для φ выполнено $\varphi(y_j)$ делится на y_j. (Это формулировка леммы, без доказательства.)

Отсюда сразу следует утверждение леммы, т.к. y_j - неприводимый элемент, тогда $\varphi(y_j)$ тоже неприводимый. Раз он неприводимый и делится на y_j, то

$$\varphi(y_j) = \lambda y_j.$$

$\square$

Доказательство теоремы 8.9.

Доказательство. Мы доказали, что y_j обладают свойством: любой одномерный тор их переводит в пропорцинальные.

Хотим показать, что если $f \in \mathrm{ML}(Y)$ - неприводимый, такой, что $\forall \Lambda \cong \mathbb{K}^\times \subset \mathrm{Aut}(Y)$, $\forall \varphi \in \Lambda$ верно

$$\varphi(f) = \lambda f \;\Rightarrow\; f = \mu y_p. \tag{8.4}$$

Из этого утверждения следует утверждение теоремы, потому что y_j удовлетворяет указанным свойствам, значит, его образ обладает теми же свойствами.
(8.4) справедливо в силу следующего.

$$\mathbb{T} \curvearrowright \mathrm{ML}(Y) = \mathbb{K}[y_1^{k_1} \dots y_m^{k_m}]$$

$$y_i \mapsto t_i y_i$$

Полуинварианты относительно $\mathbb{T}$ - мономы $\mu y_1^{a_1} \dots y_m^{a_m}$. Они являются неприводимыми $\Leftrightarrow$ это μy_p. $\square$

Лекция 9

Доказательство утверждения из лекции 8.

Напоминим, что в прошлой лекции описывались автоморфизмы многообразия

$$\{xy_1^{k_1}\dots y_m^{k_m}=P(z)\}=X,\ \ k_i\geq 2.$$

Было показано, что $y_1^{k_1},\dots,y_m^{k_m}\in \mathrm{ML}(X)=\mathbb{K}[y_1^{k_1},\dots,y_m^{k_m}]$. Кроме того, все LND на $\mathbb{K}[X]$ имеют вид реплики

$$\delta=f\hat{\delta},$$

где

$$\begin{array}{c}\hat{\delta}(x)=P'(z)\\ \hat{\delta}(y_i)=0\\ \hat{\delta}(z)=y_1^{k_1}\dots y_m^{k_m}\end{array}.$$

Последнее, что было показано: $\forall\psi\in\mathrm{Aut}(X)$

$$\psi(y_i)=\lambda_i y_j.$$

Докажем утверждение, сформулированное в доказательстве Леммы 8.13.

Увереждение 9.7. *y_j делит $\delta(y_j)$, δ - полупростое, тогда*

$$\forall\ \varphi\in\Lambda:\ \varphi(y_j)\ \vdots\ y_j.$$

Доказательство. Любая функция f раскладывается в прямую сумму

$$f=f_l+\ldots+f_k$$

по каким-то однородным элементам и

$$\varphi(t)f_s=t^sf_s.$$

Тогда

$$\delta(f_s)=sf_s.$$

Если $\sum sf_s$ делится на f, то $\delta(f_i)$ делится на f, то есть $f=f_s$. Отсюда

$$\varphi(t)\cdot f=t^sf.$$

Последнее равенство завершает доказательство. □

Порождающие группы $\mathrm{Aut}(X)$.

В лекции 8 была введена подгруппа $\mathbb{T}\subset\mathrm{Aut}(X)$. Рассмотрим $\psi\in\mathrm{Aut}(X)$, хотим его изменять на автоморфизмы из четырех извествных подгрупп и в итоге привести к единичному. Тогда будет известно, что вся группа автоморфизмов порождена

нашими известными подгруппами.
Знаем, что $\psi(y_i) = \lambda_i y_j$. Утверждается, что возможно сделать

$$t \circ \psi = \psi', \;\; t \in \mathbb{T},$$

так, чтобы все λ_i стали равны 1.

$$\psi'(y_i) = y_j$$

Далее покажем, что нельзя переставлять y_i с разными k_i.

$$\hat{\delta}(z) = y_1^{k_1} \dots y_m^{k_m} \;\;\Rightarrow\;\; \hat{\delta}(z) = 0$$

Тогда $\forall LND\ \delta:\;\ \delta^2(z) = 0?$ откуда $\delta^2(\psi(z)) = 0$. Последнее соотношение верно для элементов вида

$$a(y_1, \dots, y_m)z + b(y_1, \dots, y_m)$$

Кроме того, ψ' должен быть автоморфизмом, и к нему должен быть обратный. Тогда $a \in \mathbb{K}^\times$.

$$\psi'(z) = az + b(y_1, \dots, y_m).$$

$$xy_1^{k_1} \dots y_m^{k_m} = P(z) \;\;\Rightarrow\;\; x = \frac{P(z)}{y_1^{k_1} \dots y_m^{k_m}}$$

$$\psi'(x) = \frac{\psi'(P(z))}{\psi(y_1^{k_1} \dots y_m^{k_m})} = \frac{P(\psi'(z))}{y_{\sigma(1)}^{k_1} \dots y_{\sigma(m)}^{k_m}} \tag{9.1}$$

Напомним, что $P(z) = z^d + c_{d-2}z^{d-2} + \ldots + c_0$. Тогда

$$(9.1) = \frac{a^d P(z) + da^{d-1}b(y_1, \dots, y_m)z^{d-1} + \Delta(y_1, \dots, y_m, z)}{y_{\sigma(1)}^{k_1} \dots y_{\sigma(m)}^{k_m}}, \tag{9.2}$$

где Δ имеет члены степени не больше z^{d-2}. Поясним этот переход.

$$P(az + b) = (az + b)^d + \ldots = a^d z^d + da^{d-1}bz^{d-1} + \ldots$$

$$(9.2) = \frac{a^d xy_1^{k_1} \dots y_m^{k_m} + da^{d-1}b(y_1, \dots, y_m)z^{d-1} + \Delta}{y_{\sigma(1)}^{k_1} \dots y_{\sigma(m)}^{k_m}} \tag{9.3}$$

В числитель все z входят в степени $\leq d-1$. Следовательно, $da^{d-1}b(y_1, \dots, y_m)z^{d-1}$ делится на $y_{\sigma(1)}^{k_1} \dots y_{\sigma(m)}^{k_m}$. Более точно, $b(y_1, \dots, y_m)$ делится на $y_{\sigma(1)}^{k_1} \dots y_{\sigma(m)}^{k_m}$.

Подставим в (9.3) $z = 0$, получим

$$y_{\sigma(1)}^{k_1} \dots y_{\sigma(m)}^{k_m} \,\Big|\, \left(a^d xy_1^{k_1} \dots y_m^{k_m} + P(0)(1 - a^d) + b(y_1, \dots, y_m)g(y_1, \dots, y_m)\right) \tag{9.4}$$

Поскольку $b(y_1, \dots, y_m)$ делится на $y_{\sigma(1)}^{k_1} \dots y_{\sigma(m)}^{k_m}$, (9.4) можно переписать в виде

$$y_{\sigma(1)}^{k_1} \dots y_{\sigma(m)}^{k_m} \,\Big|\, \left(a^d xy_1^{k_1} \dots y_m^{k_m} + P(0)(1 - a^d)\right) \tag{9.4}$$

Это возможно только если $P(0)(1-a^d)=0$ и $y_{\sigma(1)}^{k_1}\dots y_{\sigma(m)}^{k_m} \mid a^d x y_1^{k_1}\dots y_m^{k_m}$. Отсюда следует, что σ переставляет y_i только с одинаковыми k_i.

За это была ответственна группа $S(X)$.
Таким образом, мы снова можем заменить ψ' на ψ''.

$$\psi''=s\circ\psi',\ \ s\in S(X)$$

$$\psi''(y_i)=y_i$$

$$\psi''(z)=az+b(y_1,\dots,y_m)$$

При этом $b(y_1,\dots,y_m)$ делится на $y_1^{k_1}\dots y_m^{k_m}$. Обозначим

$$h(y_1,\dots,y_m)=\frac{b(y_1,\dots,y_m)}{y_1^{k_1}\dots y_m^{k_m}}$$

Поймем теперь, как действует

$$\exp(h(y_1,\dots,y_n)\hat\delta)(z).$$

Напомним, что $\hat\delta(z)=y_1^{k_1}\dots y_m^{k_m}$. Тогда

$$\exp(h(y_1,\dots,y_n)\hat\delta)(z)=z+b(y_1,\dots,y_m).$$

Теперь можем продолжить процесс и заменить ψ''

$$\mathbb{U}(\hat\delta)\ni u\circ\psi''=\psi''',\quad \psi'''=az.$$

Имеем

$$\psi'''(y_i)=y_i$$

$$\psi'''(z)=az$$

$$\psi'''(x)=\frac{P(az)}{y_1^{k_1}\dots y_m^{k_m}}$$

В $\psi'''(x)$ числитель поделится на знаменатель только если $P(az)=a^dP(z)$. Ранее мы вводили дополнительный квазитор $\mathbb{D}$, который как раз за это отвечает. Если $P(az)=a^dP(z)$, то

$$\psi'''(x)=a^dx$$

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 9.10. $\mathrm{Aut}(X)$ *порождена* $\mathbb{U}(\hat\delta), S(X), \mathbb{T}, \mathbb{D}$.

Следствие 9.9. *Несложно понять, что*

$$\mathrm{Aut}(X)=S(X)\leftthreetimes\Big((\mathbb{T}\times\mathbb{D})\leftthreetimes\mathbb{U}(\hat\delta)\Big)$$

Обобщенная проблема сокращения. Контрпример Данилевского.

Есть два многообразия Данилевского

$$X = \{xy = P(z)\}$$

$$Y = \{xy^2 = P(z)\}$$

В качестве P возьмем конкретный многочлен

$$X = \{xy = z^2 + 1\}$$

$$Y = \{xy^2 = z^2 + 1\}$$

Для этих многочленов мы поняли, что $X \ncong Y$, потому что

$$\mathrm{ML}(Y) = \mathbb{K}[y], \quad \mathrm{ML}(X) = \mathbb{K}.$$

$\mathrm{ML}(X)$ имеет такой вид, потому что на многообразии есть два дифференцирования

$$\begin{array}{cc} \delta_x(x) = 0 & \delta_y(y) = 0 \\ \delta_x(y) = 2z & \delta_y(x) = 2z \\ \delta_x(z) = x & \delta_y(z) = y \\ \ker \delta_x = \mathbb{K}[X] & \ker \delta_y = \mathbb{K}[Y] \end{array}$$

$$\ker \delta_x \cap \ker \delta_y = \mathbb{K}$$

Чтобы привести контрпример к проблеме сокращения, покажем, что если эти многообрания умножить на прямую, то получим одно и то же.

Пусть $\delta \in LND(B)$ - дифференцирование на алгебре B, и пусть в нем есть слайс. $s \in B$ называется слайсом, если $\delta(s) = 1$.
Определитель Диксинье

$$\pi_s(f) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \delta^i(f) s^i}{i!} \tag{9.5}$$

$$A := \ker \delta$$

Теорема 9.11. *1)* $\pi_s(B) \subset A$,

2) π_s *- гомоморфизм* $B \mapsto A$,

3) $\ker \pi_s = sB$,

4) $B = A[s]$.

Получается, что если у LND есть слайс, то вся алгебра - это алгебра многочленов над ядром.

Доказательство. 1) Применим δ к образу

$$\delta(\pi_s(f)) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!}\delta^{i+1}(f)s^i + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!}\delta^{i}(f)is^{i-1}$$

Распишем вторую сумму

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!}\delta^{i}(f)is^{i-1} = |j = i-1| = -\sum_{j=-1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!}\delta^{j+1}(f)s^j$$

Заметим теперь, что

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!}\delta^{i}(f)is^{i-1} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!}\delta^{i}(f)is^{i-1},$$

т.к. слагаемое, которое соответствует $i = 0$, умножается на 0, откуда

$$\sum_{j=-1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!}\delta^{j+1}(f)s^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!}\delta^{j+1}(f)s^j$$

$$\delta(\pi_s(f)) = 0$$

2) Реализуем π_s как композицию нескольких гомоморфизмов.

$$B \hookrightarrow B[t] \xrightarrow{\exp(f\delta)} B[t] \xrightarrow{ev: t\to s} B$$

На B есть дифференцирование δ, можно его продолжить на $B[t]$, положив $\delta(t) = 0$.
Каждое из отображений, очевидным образом, гомоморфизм. Видно, что эта композиция равна π_s.

3) Рассмотрим сначала $\pi_s(s)$, по формуле (9.5)

$$\pi_s(s) = s - s = 0,$$

откуда следует, что

$$\pi_s(sB) = 0.$$

Показали, что ядро содержит sB. Покажем теперь, что они совпадают. Пусть $f \in \ker \pi_s$, тогда $\pi_s(f) = 0$, но с другой стороны $\pi_s(f) = f + s \cdot b \Rightarrow f = -sb$, откуда

$$f \in sB$$

4) Рассмотрим $\delta: B[t] \mapsto B[t]$. Тогда

$$\ker \delta = A[t].$$

$$\pi_s : B[t] \mapsto A[t]$$

Легко видеть, что $\pi_s(t) = t$, поскольку t лежит в ядре. Получаем отображение

$$\varphi : \; B \mapsto A[s],$$

если $i : \; B \hookrightarrow B[t]$, то

$$\varphi = ev \circ \pi_s \circ \exp(t\delta) \circ i.$$

$$B \ni g \mapsto g \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\delta^i(g)t^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_s(\delta^i(g))t^i \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}\pi_s(\delta^i(g))s^i$$

Если $a \in A$, то $\varphi(a) = \pi_s(a) = a$, $\varphi(s) = s$.
φ - композиция гомоморфизмов, а значит, гомоморфизм. Т.к. a лежит в образе и s лежит в образе, то φ - сюръекция.

Чтобы определить, что это биекция, рассмотрим ядро φ. Допустим, $\varphi(g) = 0$. Заметим, что т.к. A - ядро нашего дифференцирования, s - элемент, на котором дифференцирование равно 1, откуда $s \notin A$. Ядро дифференцирования алгебраически замкнуто, а значит s трансцендентен над A и $A[s]$ - действительно алгебра многочленов.

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}\pi_s(\delta^i(g))s^i = 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{i!}\pi_s(\delta^i(g)) = 0$$

Старший ненулевой член при $i = \deg_\delta g$. Это значит, что для такого i

$$\delta^i(g) \in \ker \pi_s$$

$$\delta^i(g) \in A \backslash \{0\}$$

Но тогда $s \in A$, потому что ядро факториально замкнуто. Противоречие с тем, что $g \neq 0$. Из наших рассуждений следует, что $g = 0$.

$$\ker \varphi = \{0\}$$

φ - изоморфизм.

□

Лекция 10

Пользуясь результатами, полученными в прошлой лекции, приведем контрпример к общей проблеме сокращений.

Обобщенная проблема сокращения. Контрпример Данилевского.

Напомним обозначения

$$\{xy = z^2 + 1\} = X$$
$$\{x^2y = z^2 + 1\} = Y$$

С помощью инварианта Макар-Лиманова показали, что $X \ncong Y$. Теперь покажем, что

$$\mathbb{K}[X][t] \cong \mathbb{K}[Y][s].$$

Это утверждение эквивалентно следующему: если многообразия X и Y умножить на прямую, получим изоморфные многообразия.

Доказательство. Обозначим $B := \mathbb{K}[X][t]$. Получается, $B = \mathbb{K}[x, y, z, t]/(xy - z^1 - 1)$.
Определим LND на B следующим образом

$$\delta(y) = 0$$
$$\delta(z) = y$$
$$\delta(x) = 2z$$

Если обозначить, $xy = z^2 + 1 = P(z)$, становится понятно, что это то же дифференцирование, которое было разобрано на поверхностях Данилевского. Пусть также

$$\delta(t) = 3x$$

Проверим, что $\delta \in LND$. y сразу переходит в 0, z переходит в y, а затем в 0, и т.д.

$$\delta(y) = 0$$
$$\delta^2(z) = 0$$
$$\delta^3(x) = 0$$
$$\delta^4(t) = 0$$

Все образующие переходят в 0, откуда $\delta \in LND$.
Чтобы воспользоваться теоремой 9.11, нужно предъявить слайс

$$s = \frac{1}{2}(yt - xz)$$

$$\delta(s) = \frac{1}{2}(\delta(y)t + y\delta(t) - \delta(x)z - x\delta(z)) = \frac{1}{2}(0 + 3xy - 2z^2 - xy) = xy - z^2$$

В силу соотношения $(xy - z^2 - 1)$, получаем $xy - z^2 = 1$, откуда $\delta(s) = 1$.
Тогда

$$B = R[s], \quad R = \ker\delta.$$

Хотим доказать, что

$$R = \mathbb{K}[Y], \tag{10.1}$$

потому что тогда $B = R[s] = \mathbb{K}[Y][s]$.

Докажем (10.1). Рассмотрим отображение

$$\pi_s : \ B \mapsto R$$

$$\pi_s(x) =: \hat{x}, \ \ \pi_s(y) =: \hat{y}, \ \ \pi_s(z) =: \hat{z}, \ \ \pi_s(t) =: \hat{t}$$

Напомним, что

$$\pi_s(f) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \delta^i(f)}{i!} s^i$$

Несложно видеть, что для y в этой сумме есть только одно слагаемое, поскольку $\delta(y) = 0$, тогда

$$\hat{y} = y.$$

$$\hat{x} = x - 2zs + ys^2 = x - \underbrace{zyt}_{\text{делится на } y} + xz^2 + \underbrace{ys^2}_{\text{делится на } y} =$$

$$= x + xz^2 + y(\ldots) = x(1 + z^2) + y(\ldots) = x^2y + y(\ldots)$$

В итоге $\hat{x}$ делится на y, тогда сделаем замену $\hat{\hat{x}} = \frac{\hat{x}}{y}$.
Заметим, что

$$1 = \pi_s(1) = \pi_s(xy - z^2) = \hat{x}y^{-}\hat{z}^2 = \hat{\hat{x}}y^2 - \hat{z}^2$$

$$0 = \pi_s(2s) = \pi_s(yt - xz) = y\hat{t} - \hat{x}\hat{z} = y\hat{t} - \hat{\hat{x}}\hat{z}y = y(\hat{t} - \hat{\hat{x}})$$

Отсюда следует

$$\hat{t} = \hat{\hat{x}}\hat{z}$$

$$\pi_s : \ B \mapsto R$$

при этом $B = \mathbb{K}[x, y, z, t]/(xy - z^1 - 1)$, откуда

$$R = \mathbb{K}[\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \hat{t}]/(\hat{\hat{x}}y^2 - \hat{z}^2 - 1)(\hat{t} - \hat{\hat{x}}\hat{z})$$

уберем $\hat{t}$, поскольку оно выражается с помощью второго соотношения

$$R = \mathbb{K}[\hat{\hat{x}}, \hat{y}, \hat{z}]/(\hat{\hat{x}}y^2 - \hat{z}^2 - 1) \tag{10.2}$$

Получилось ровно то, чего мы добивались

$$R = \mathbb{K}[Y]$$

На самом деле, мы не пояснили, почему нет других соотношений. Это следует из того, что многообразие (10.2) неприводимо и нужной размерности в том смысле что степень трансцендентности ядра дифференцирования должна быть на 1 меньше, чем у исходной алгебры. Степень трансцендентности B равна 3, а степень трансцендентности $\mathbb{K}[\hat{\hat{x}}, \hat{y}, \hat{z}]$ равна 2, плюс уравнение понижает степень.

□

Можно показать, что ни X, ни Y не изоморфны двумерной плоскости.
Таким образом, показанный результат не дает ответ на следющий вопрос: если

$$X \times \mathbb{A}^1 \cong \mathbb{A}^{n+1},$$

то следует ли из этого $X \cong \mathbb{A}^n$?

Транзитивность.

Определение 10.22. *X - множество, $G \curvearrowright X$ - транзитивно, если $\forall\ x, y \in X\ \exists g \in G$ такое что $g \cdot x = y$.*

Определение 10.23. *X - множество, $G \curvearrowright X$ - m-транзитивно, если $\forall (a_1, \ldots, a_m) \in X^m,\ a_i \neq a_j,\ \ \forall (b_1, \ldots, b_m) \in X^m,\ b_i \neq b_j,\ \ \exists g \in G$ такое что $\forall i:\ g \cdot a_i = b_i$.*

Определение 10.24. *X - множество, $G \curvearrowright X$ - ∞-транзитивно, если $G \curvearrowright X$ m-транзитивно $\forall m \in \mathbb{N}$.*

Рассмотрим $a_1, \ldots, a_m$, такие что $a_i = (x_i, y_i)$. Утверждается, что можно повернуть оси x, y не некоторый угол α и после этого считать, что координаты всех точек разные.

Рассмотрим следующие автоморфизмы

$$\begin{cases} x \mapsto x + f(y)t \\ y \mapsto y \end{cases}$$

Будем выбирать такое f, что

$$f(y_1) = \ldots = f(y_{i-1}) = f(y_{i+1}) = \ldots = f(y_m) = 0$$

$$f(y_i) \neq 0$$

Т.е. можно взять просто

$$f = (y - y_1) \ldots (y - y_{i-1})(y - y_{i+1}) \ldots (y - y_m)$$

Все точки, кроме y_i остаются на месте, а y_i можно передвинуть на любой вектор по горизонтали, подбирая подходящее t.
Точно так же можно сделать автоморфизм, который будет передвигать точку по вертикали.

Хотим точки $a_1, \ldots, a_m$ перевести в точки $b_1, \ldots, b_m$ с помощью одного автоморфизма g. Причем хотим выбрать такой поворот, чтобы не только для $a_i = (x_i, y_i)$ не совпадали координаты, но и для $b_i = (x'_i, y'_i)$ координаты также не совпадали.

Построим g как композзицию элементарных: сначала в два этапа a_1 переводим в b_1, затем a_2 в b_2 и т.д.

Такой же алгоритм можно применять и для большей размерности, например,

$$\begin{cases} x \mapsto x + f(y,z) \\ y \mapsto y \\ z \mapsto z \end{cases}$$

Пусть $G = \mathrm{Aut}(X)$, тогда действие каждого $g \in G$ - это автоморфизм. Утверждается, что тогда он гладкие точки переводит в гладкие, а особые точки в особые. Если у многообразия есть особые точки, то транзитивности не будет. Большинство точек гладкие, а особые образуют замкнутое подмногообразие, и если они есть, то не получится перевести гладкие в особые.
Поэтому максимум, что можно предполагать - что все гладкие можно перемешать между собой. Вопрос с особыми точками стоит довольно остро: даже если мы понимаем все, что происходит с гладкими точками, то с особыми нужно разбираться отдельно.

Тогда потребуем, чтобы действие группы автоморфизмов на множестве гладких точек X^{reg} транзитивно, а не на всем X.

Определение 10.25. $\mathrm{SAut}(X)$ - *подгруппа специальных автоморфизмов. Напомним, что если X - аффинное, то иногда есть LND*

$$\delta: \ \mathbb{K}[X] \mapsto \mathbb{K}[X],$$

тогда

$$\{\exp(t\delta) \mid t \in \mathbb{K}\} \cong G_a.$$

$$\mathrm{SAut}(X) := \langle \textit{все алгебраические } G_a - \textit{подгруппы} \rangle$$

Это частный случай более широкого определения.

Определение 10.26. *Подгруппа $H \subset \mathrm{Aut}(X)$ называется алгебраически порожденной, если существует некий набор (возможно, бесконечный) алгебраических подгрупп $H_\alpha \subset \mathrm{Aut}(X),\ \alpha \in I$ таких, что*

$$\langle H_\alpha \rangle = H.$$

Алгебраическая подгруппа в группе автоморфизмов - это подгруппа, которая порождена алгебраическим действием алгебраической группы.

Группа $\mathrm{SAut}(X)$, очевидно, алгебраически порожденная.

Определение 10.27. *Точка $x \in X^{reg}$ называется гибкой, если T_xX порождено касательными векторами к орбитам алгебраических G_a-действий.*

Определение 10.28. *Многообразие X называется гибким, если любая его гладкая точка является гибкой.*

Теорема 10.12. *Пусть X - аффинное многообразие, $\dim X \geq 2$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) X - гибкое,

2) $\mathrm{SAut}(X) \curvearrowright X^{reg}$ - транзитивно,

3) $\mathrm{SAut}(X) \curvearrowright X^{reg}$ ∞-транзитивно.

Очевидно, 3) $\Rightarrow$ 2). Доказательство будет позже.

Пример

Проверим, что $\mathbb{A}^n$ гибкое.

Пусть на $\mathbb{A}^n$ есть координаты $x_1, \ldots, x_n$ и частные дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$$

Определим, куда смотрят касательные вектора к соответствующим G_a-действиям. Понятно, что действия у нас следующие

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(x_j) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(x_i) = 1$$

Соответственно,

$$\varphi_t = \left(\exp t \frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \mathrm{id} + t\frac{\partial}{\partial x_i} + \ldots \tag{10.3}$$

Поскольку $\frac{\partial}{\partial x_i}(x_j) = 0$, то все x_j переходят в себя при отображении (10.3).

$$\varphi_t(x_j) = x_j$$

$$\varphi_t(x_i) = x_i + t$$

Получается, что все координаты зафиксированы, кроме одной, по которой сдвигаемся. Все орбиты лежат вдоль координатных осей, в частности, для нашей точки касательный вектор к орбите направлен вдоль координатной оси x_i.

В $\mathbb{A}^n$ нет не гладких точек, поэтому оно гибкое.

Для $n \geq 2$ отсюда следует, что $\mathrm{SAut}(\mathbb{A}^n)$ действует ∞-транзитивно.

Пример

Аффинные нормальные невырожденные торические многообразия.

Пусть ест тор $T = (\mathbb{K}^\times)^n$, многообразие X называется торическим, если $T \curvearrowright X$ - с открытой орбитой.
Несложно заметить, что если тор действует неэффективно, то эффективно действует фактор по ядру неэффективности. Поскольку фактор тора по любой подгруппе является тором, можно считать

$$\dim T = \dim X,$$

т.е. действие эффективно.

Аффиность, нормальность означает, что X аффинно, нормально.

Невырожденность. Доказывается, что любое нормальное торическое многообразие является произведением некого тора, возможно, меньшей размерности на многообразие Y, которое уже не представляется в виде $(\mathbb{K}^\times)^l$.
Другими словами, у Y нет обратимых функций, т.е.

$$\mathbb{K}[Y]^\times = \mathbb{K}^\times$$

Невырожденность $\Leftrightarrow$ $\mathbb{K}[X]^\times = \mathbb{X}^\times$.
Возьмем пространство $\mathbb{Q}^n$, в нем лежит решетка $\mathbb{Z}^n = M$. Рассмотрим в $\mathbb{Q}^n = M_Q$ полиэдральный конус $\sigma^\vee$.
У полиэдрального конуса два эквивалентных определения.

$$\sigma^\vee \sum \lambda_i v_i, \quad \mathbb{Q} \ni \lambda_i \geq 0$$

или это пересечение конечного числа замкнутых полупространств.

$(\mathbb{Q}^n)^* = N_Q \supset M^* = N$, N - гомоморфизмы из M в $\mathbb{Z}$.
Тогда между этими двумя решетками есть спаривание

$$\langle n, m\rangle \in \mathbb{Z}$$

В пространстве N_Q по конусу $\sigma^\vee$ можно построить конус σ

$$\sigma = \{u \in N_Q \mid \forall v \in \sigma^\vee : \ \langle u, v\rangle \geq 0\}$$

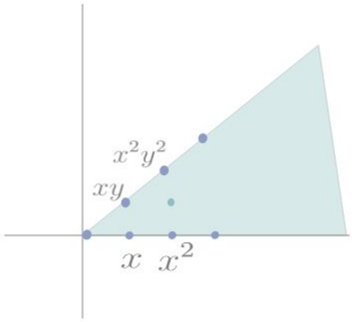
Каждому элементу решетки в M_q сопоставим моном

$$(a_1, \ldots, a_n) \ \leftrightarrow \ x_1^{a_1} \ldots x_n^{a_n}$$

Конусу $\sigma^\vee$ будет соответствовать многообразие X такое, что

$$\mathbb{K}[X] = \langle \text{все мономы, входящие в } \sigma^\vee\rangle$$

Рассмотрим конус, порожденный мономами xy и x.



Несложно видеть, что тогда в $\sigma^\vee$ лежать все $x^iy^j: \ i \geq j \geq 0$.
Все они порождены двумя момномами

$$\mathbb{K}[x, xy]$$

Лекция 11

Торические многообразия.

На прошлой лекции определили конус σ в N_Q и конус $\sigma^\vee$ в M_Q.

Занумеруем ребра σ как $\rho_1, \ldots, \rho_k$. На каждом из них берем самый короткий целочисленный вектор $v_1, \ldots, v_k$, тогда e - корень Демазюра, соответсвтующий ρ_i, если

$$\langle v_i, e\rangle = -1$$
$$\langle v_j, e\rangle \geq 0, \ \ \forall j \neq i$$

Каждому ребру ρ_i соответствует перпендикулярная ему грань, и вектор e лежит вне самого конуса, но рядом с этой гранью.
На самом деле, от вектора e нужно следующее: возьмем целочисленную точку внутри $\sigma^\vee$ и будем ее сдвигать вдоль e. Тогда через несколько шагов мы должны попасть на грань, перпендикуряную ρ_i - $\rho_i^\perp$.

Во-первых, $\langle v_i, e\rangle = -1$. У сонаправленного вектора с e, выходящего из выбранной точки, по мере приближения к грани уменьшается скалярное произведение с v_i и рано или поздно оно станет 0. Перемахнуть через 0 мы не можем, потому что произведение уменьшается на 1.

С другой стороны, есть теоретическая возможность, что мы приблизимся к какой-то другой грани, но такого не происходит, потому что скалярное произведение с остальными v_j неотрицательно, и, значит, от всех остальных граней мы скорее удаляемся.

Определим LND
$$\partial_e(\chi^{m+l}) = \langle v_i, m\rangle \chi^{m+l}$$
Это дает дифференцирование: проверим тождество Лейбница на однородных.
Пусть R - множество всех корней Демазюра, оно раскладывается в объединение

$$R = R_1 \sqcup \ldots \sqcup R_k,$$

где R_i - корни Демазюра, соответствующие ρ_i.

$$\partial_e(\chi^m\chi^{m'}) = \chi^m\partial_e(\chi^{m'}) + \chi^{m'}\chi^m\partial_e(\chi^m)$$
$$\partial_e(\chi^m\chi^{m'}) = \langle v_i, m+m'\rangle \chi^{m+m'}$$
$$\chi^m\partial_e(\chi^{m'}) = \langle v_i, m\rangle \chi^{m'+e}\chi^m$$
$$\chi^{m'}\chi^m\partial_e(\chi^m) = \langle v_i, m\rangle \chi^{m+e}\chi^{m'}$$
Теперь каждому ∂_e можно сопоставить $H_e = \{\exp s\partial_e\}$.

Наша цель - показать, что такие нормальные торические многообразия являются гибкими.

Для гибкости достаточно $\partial_e \to H_e$.

Есть торическое многобразие, там есть открытая орбита T, может быть, есть более маленькие орбиты.
Нас интересуют только гладкие орбиты, нужно показать, что касательное пространство в любой гладкой точке порождается касательными векторами к каким-то G_a действиям.

Мы это проверим, вообще говоря, в одной точке. Если две точки переводятся друг в друга автоморфизмом φ, то дифференциал этого автоморфизма переводит касательное пространство в одной точке в касательное пространство в другой точке.

Нам нужно понять следующие две вещи:

1) Есть гибкая точка

2) $\mathrm{Aut}(X)$ действует на гладких точках транзитивно

Первое.

$$H_e(\chi^m) = \chi^m + s\langle v_i, m\rangle\chi^{m+e} + s^2\ldots$$

Если это выражение продифференцировать по s при $s = 0$, получится

$$\frac{\partial}{\partial s}H_e(s)(\chi^m)(0) = \langle v_i, m\rangle\chi^{m+e}$$

Какие-то из векторов $v_1, \ldots, v_k$ являются линейно независимыми, пусть это $v_1, \ldots, v_n$.

Второе.

Цель - выйти с помощью автоморфизма из какой-то орбиты в открытую орбиту.
Можно понять, что либо орбита состоит из неподвижных точек относительно H_e, либо H_e подействует на какую-то точку орбиты, получится прямая, которая поти вся лежит внутри этой орбиты, и только одна точка лежит в орбите меньшей размерности (H_e-связные орбиты).
Соответственно, таким действием H_e можно выйти из какой-то орбиты в более большую.

Можно проследить, какие именно орбиты являются H_e-связными и понять, что из каждой гладкой орбиты можно дойти до максимальной, т.е. до открытой.

Определение 11.29. *Пусть* $\mathbb{K}[X] = \bigoplus\limits_{i\in\mathbb{Z}} \mathbb{K}[X]_i$.
Такое действие может быть одного их трех типов

1) *Эллиптический*
$\mathbb{K}[X]_i = 0$ *при* $i < 0$ *и* $\mathbb{K}[X]_0 = \mathbb{K}$,

2) Параболический
$\mathbb{K}[X]_i = 0$ *при* $i < 0$ *и* $\mathbb{K}[X]_0 \neq \mathbb{K}$,

3) Гиперболический
есть и положительные, и отрицательные компоненты.

Теорема 11.13. *Пусть есть не гиперболическое G_m-действие на аффинном неприводимом многообразии X, пусть Z - множество неподвижных точек.*
Предположим, что существует гладкая точка X, которая лежит в Z.
Тогда

$$Z^{reg} \cap X^{reg} \neq \emptyset,$$

$\forall z \in Z \cap X^{reg}$ *касательное пространство в z к X порождено $T_z Z$ и касательными векторами к G_a-действию.*

Пусть есть некое торическое многообразие. Орбиты тора соответствуют граням конуса.
Можем выбрать гипергрань и будем на ней умножать на 1. Далее конус разбивается на плоскости, параллельные этой грани, на которых будем умножать на $t,\ t^2,\ t^3,\ \ldots$.

Получается некая не гиперболическая градуировка.

Доказательство. Сначала докажем, что

$$Z^{reg} \cap X^{reg} \neq \emptyset.$$

$\mathbb{K}[Z] = \mathbb{K}[X]_0 \Rightarrow Z$ - неприводимо.
$Z^{reg} \cap X^{reg}$ - открытое пожмножество в Z.
Z^{reg} - тоже открытое пожмножество в Z.
Отсюда

$$\exists z \in Z^{reg} \cap X^{reg}.$$

Пусть m_z - максимальный идеал z в $\mathbb{K}[X]_0$, M_z - максимальный идеал z в $\mathbb{K}[X]$.
Тогда

$$M_z = m_z \oplus I(z)$$

Вообще говоря,

$$\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}[X]_0 \oplus \bigoplus_{i>0} \mathbb{K}[X]_i$$

Утверждается, что $\mathbb{K}[X]_i$ - множество функций, которые обращаются в 0 на Z.
Пусть $\dim Z = k = \dim m_z/m_z^2$.

$$\dim X = k + n = \dim M_z/M_z^2$$

$$M_z/M_z^2 = (m_z \oplus I(z))/(m_z \oplus I(z))^2 = m_z/m_z^2 \oplus I(z)/(m_z I(z) + I(z)^2)$$

Выберем $h_1, \ldots, h_k$ - локальные параметры в m_z, функции, такие что их смежные классы $h_i + m_z$ дают базис в m_z/m_z^2.
Дополним этот базис функциями $f_1, \ldots, f_n \in I(z)$, что смежные классы $h_1, \ldots, h_k, f_1, \ldots, f_n$

- базис в M_z/M_z^2.
Можно считать f_i Z-однородными.

$h_1, \ldots, h_k, f_1, \ldots, f_n$ - алгебраически независимы. Отсюда $h_1, \ldots, h_k$ - базис трансцендентности $\mathbb{K}[X]_0$, $f_1, \ldots, f_n$ - алгебраически независимы над $\mathbb{K}[X]_0$.

Рассмотрим кольцо

$$\mathcal{A} = \mathbb{K}[X]_0[f_1, \ldots, f_n]$$

Оно $\mathbb{Z}$-градуированно.

Лемма 11.14. *Пусть δ - однородное $LND(\mathcal{A})$, $\deg\delta < 0$.*
Тогда $\exists s \in \mathbb{K}[X]_0 \backslash m_z$, что $s\delta$ продолжается до однородного LND на $\mathbb{K}[X]$.

Сначала выведем утверждение теоремы из Леммы, а потом докажем ее.
Идея в том, что на алгебре $\mathbb{K}[X]_0$ известно много LND

$$\frac{\partial}{\partial f_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial f_n}$$

и они имеют соответствующие степени

$$-\deg f_1, \ldots, -\deg f_n$$

Они все отрицательные, однородные, следовательно, попадают под Лемму и для каждого из них существуют такие s, что

$$s_1\frac{\partial}{\partial f_1}, \ldots, s_n\frac{\partial}{\partial f_n}$$

являются дифференцированиями $\mathbb{K}[X]$.

$$\delta_i := s_i\frac{\partial}{\partial f_i}$$

$$\delta_i(h_j) = 0$$

$$\delta_i(f_j) = 0$$

$$\delta_i(f_i) = s_i, \ \ \delta_i(f_i)(z) \neq 0$$

M_z/M_z^2 - двойственное касательное пространство. δ_i - двойственный вектор к $f_i + M_z$.
С разными f_i они будут лиенйно независимы и будут дополнять касательное пространство до касательного пространства X.
Тоерема доказана.

□

Доказательство Леммы.

Доказательство. Пусть $g_1, \ldots, g_r$ - однородные порождающие алгебры $\mathbb{K}[X]$.
Индукция по $u \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
Существует s_u, что для всех $g_i \in \mathbb{K}[X]_j$ при $j \leq u$

$$s_u \delta(g_i) \in \mathbb{K}[X], \;\; s_u \in \mathbb{K}[X] \backslash m_z$$

$$\delta : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{A},$$

$\mathbb{K}[X]$ - алгебраическая над $\mathcal{A}$, тогда δ продолжается до $\mathbb{K}[X] \mapsto \mathbb{K}(X)$.
База. $u = 0$
$g_i \in \mathbb{K}[X]_0$

$$\delta(g_i) = 0,$$

а 0 - это элемент кольца.
Шаг.

$$\rho = s_{n-1}\delta$$

Если $g_i \in \mathbb{K}[X]_j, \; j < u$, то $\rho(g_i) \in \mathbb{K}[X]$. Выберем $g_{i_1}, \ldots, g_{i_l} \in \mathbb{K}[X]_u \subset I(Z) \subset M_z$ - все такие. Тогда

$$g_i = a_1 f_1 + \ldots + a_n f_n + F_i + G_i, \;\; F_i \in m_z I(Z), \;\; G_i \in I(Z)$$

Можно считать

$$F_i = p_1 g_1 + \ldots p_l g_l \in m_z$$

Спроектируем g_i на $\mathbb{K}[X]_u$ вдоль суммы остальных однородных компонент, тогда F_i будет таким.

Дальше идея выразить отсюда g_1

$$g_1 = \frac{a_1 f_1 + \ldots + a_n f_n + p_2 g_2 + \ldots + p_n g_n}{1 + p_1}$$

□

Лекция 12

Доказательство теоремы из лекции 10.

Приведем основные идеи доказательства теоремы 10.12. Относительно подробно разберем только первые 2 пункта.

Теорема. *Пусть X - аффинное многообразие, $\dim X \geq 2$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) X - гибкое,

2) $\mathrm{SAut}(X) \curvearrowright X^{reg}$ - транзитивно,

3) $\mathrm{SAut}(X) \curvearrowright X^{reg}$ ∞-транзитивно.

Определение 11.30. *$G \subset \mathrm{Aut}(X)$ называется алгебраически порожденной, если $G = \langle H_\gamma \mid \gamma \in \Gamma \rangle$, H_i - алгебраически порожденные.*

$J = \{H_\gamma \mid x \in \Gamma\}$.
Введем
$$\mathcal{H} = (H_1, \ldots, H_s) \subset J^s$$
Установим частичный порядок: один набор больше другого, если первый получается приписыванием чего-то ко второму.

Такому набору можно сопоставить отображение
$$\Phi_{\mathcal{H},X}:\ H_1 \times H_s \mapsto X$$
$$(h_1, \ldots, h_s) \mapsto (h_1 \cdot \ldots \cdot h_s)x$$

Предложение 11.2. *Если G алгебраически порожденная, то любая G-орбита открыта в своем замыкании.*

Доказательство. Можно считать, что X - замыкание некоторой G-орбиты.
$$X_{\mathcal{H},x} = (H_1 \cdot \ldots \cdot H_s)x$$
Объединение $X_{\mathcal{H},x}$ для различных $\mathcal{H}$ плотно в X.
Тогда
$$\bigcup_{\mathcal{H}} \overline{X_{\mathcal{H},x}} \tag{12.1}$$
тоже плотно в X. (12.1) дает некое увеличивающееся замкнутое подмножество.

Существует такое $\mathcal{H}$, что $\overline{X_{\mathcal{H},x}} = X$.
Действительно, если есть $X_{\mathcal{H},x}$ и $X_{\mathcal{H}',x}$, то можно рассмотреть
$$\mathcal{H}'' = (\mathcal{H}, \mathcal{H}'),$$

откуда

$$X_{\mathcal{H},x} \subset X_{\mathcal{H}'',x}, \quad X_{\mathcal{H}',x} \subset X_{\mathcal{H}'',x}$$

и

$$\overline{X_{\mathcal{H},x}} \subset \overline{X_{\mathcal{H}'',x}}, \quad \overline{X_{\mathcal{H}',x}} \subset \overline{X_{\mathcal{H}'',x}}$$

Более того, эти увеличивающиеся замкнутые подмножества неприводимы.

Если теперь одно неприводмиое замкнутое вложено в другое и она не равны, то они должны отличаться по размерности. $\dim X < \infty$, откуда рано или поздно расширяющаяся последовательность стабилизируется.

Рассмотрим внутренность $X_{\mathcal{H},x}$ - это непустое открытое подмножество в X, которое содержит x.
$X_{\mathcal{H},x}$ - это образ морфизма. Оно состоит из объединения открытых в неких замкнутых подмногообразиях.

Так или иначе, если его замыкание совпадает с X, то оно содержит хотя бы одно непустое открытое подмножество X.

Понятно, что внутренность $X_{\mathcal{H},x}$ лежит в $X_{X,x} \subset G_x$.
Отсюда G_x открыта в X, что завершает доказательство. □

Предложение 11.3. *Для любого x существуют (не обязательно различные) подгруппы $H_1, \ldots, H_s \in J$ такие, что*

$$(H_1 \ldots H_s)x = G_x.$$

Доказательство. Введем множество

$$Z_{\mathcal{H}} = \Phi_{\mathcal{H}}(H_1 \times \ldots \times H_s \times X) \subset X \times X$$

$$\Phi_{\mathcal{H}} : \ (h_1 \times \ldots \times h_s \times x) \mapsto (x, h_1 \times \ldots \times h_s, x)$$

Множество $H_1 \times \ldots \times H_s \times X$ неприводимо, тогда $X \times X$ неприводимо и конструктивно.

Если теперь $\mathcal{H}'$ больше $\mathcal{H}$, то $Z_{\mathcal{H}} \subset Z_{\mathcal{H}'}$. Рассмотрим

$$Z = \bigcup_{\mathcal{H}} \overline{Z_{\mathcal{H}}}$$

Проводя похожие на прошлое доказательство рассуждения, получаем, что Z должно стабилизировать в $X \times X$.

Значит, есть такое $\mathcal{H}$, что $Z = \overline{Z_{\mathcal{H}}}$.

В частности, Z замкнуто.

Возьмем внутренность $Z_{\mathbb{H}}$ в Z и рассмотрим $Z\prime$ - объединение внутреннностей. Оно будет открыто и плотно в Z.

Рассмотрим G-действие на $X \times X$

$$g \cdot (x, y) = (gx, y)$$

Имеем,

$$\mathcal{H}\Phi_{\mathcal{H}}(h_1, \dots, h_s, x) = h(h_1x, \dots, h_sx) = \Phi_{(\mathcal{H},H)}(h_1, \dots, h_s, h^{-1}, h \cdot x)$$

Это доказывает, что $h \cdot Z_{\mathcal{H}} \subseteq Z_{(\mathcal{H},H)}$.
Получается, Z и Z' являются H-инвариантами и, отсюда, G-инвариантами.

Кроме того, существует $\mathcal{H}$ такое что $Z = \overline{Z_{\mathcal{H}}}$.
Тогда Z' равно внутренности $Z_{\mathcal{H}}$.

$Z, Z' \subset X \times X$. Из $X \times X$ есть каноничeнская проекция P на первую координату $P: \ X \times X \mapsto X$.

Факт: существует открытое плотное подмножество $V \subset X$ такое, что $Z'(x)$ плотно в $Z(x)$ для любого $x \in V$, где $M \subset X \times X$, $M(x)$ - слой $P|_H$ над x.

P - G-инвариант. Тогда можно считать, что V - тоже G-инвариант, тогда существует $\mathcal{H}$, такое что $Z_{\mathcal{H}}(x)$ плотно в $Z(x)$ для любой $x \in V$.

Значит, $Z(x)$ - замыкание G_x.

Докажем, что $(H_1, \dots, H_s)x = G_x$.

Возьмем $x, gx \in V$ и рассмотрим $(H_1, \dots, H_s)x, \ \ (H_1, \dots, H_s)gx$, тогда
$(H_1, \dots, H_s)x, \ \ (H_1, \dots, H_s)gx$ плотны в $Z(x)$, а значит они пересекаются.

Т.е.

$$h_1 \dots h_s \cdot x = \widetilde{h}_1 \dots \widetilde{h}_s gx$$

$$gx = \widetilde{h_s}^{-1} \dots \widetilde{h_1}^{-1} h_1 \dots h_s x \in (H_s, \dots, H_1, H_1, \dots H_s)x$$

Это завершает доказательство. □

Предложение 11.4. *Пусть J замкнуто относительно сопряжения, тогда существует последовательность $\mathcal{H} = H_1, \dots, H_s$ таких, что для любого x касательное пространство к орбите порождено $T_x(H_1x), \dots, T_x(H_sx)$.*

Без доказательства.

Определение 11.31. *Гладкая точка x называется G-гибкой, если в ней касательное пространство к X совпадает с касательным пространством к орбите.*

Следствие 11.10. *а)Гладкая точка является G-гибкой $\Leftrightarrow$ G_x открыта в X.*
b) Открытая G-орбита, если она существует, состоит из всех G-гибких точек.

Доказательство. **a)** Рассмотрим

$$\Phi_{\mathcal{H},x}:\ H_1\times\ldots\times H_s\mapsto G_x$$

Можно выбрать H_i такие, что это сюръекция.
Касательное пространство к образу совпадает с касательным пространством к X.

Отсюда орбита G_x плотна в X, а значит и открыта в X.

b) Предположим, есть открытая орбита G_x. Возьмем точку внутри нее. По пункту а) она G-гибкая.

Пусть есть G-гибкая точка y вне G_x, тогда орбита G_y тоже открыта и совпадет с G_x, т.к. X неприводим. □

Применим эти результаты к $J =$ все подгруппы в $\mathrm{Aut}(X)$, изоморфные G_a.
Тогда $G = \mathrm{SAut}(X)$ и J замкнуто относительно сопряжений.

Тогда все наши условия выполнены.

Сейчас мы идейно показали эквивалентность двух вещей

1) X гибкое
2) $\mathrm{SAut}(X)$ действует на гладких точках транзитивно.

Теорема 11.14. *Пусть G - алгебраически порожденная подгруппа, тогда существует конечное число рациональных G-инвариантов, разделяющих орбиты.*

Идейно покажем, что в теореме 10.12 из 2) следует 3).

Это эквивалентно утверждению: пусть $M = X^{reg}\backslash\{x_1,\ldots,x_n\}$. Тогда $\mathrm{SAut}(X)$ действует на M транзитивно.

Транзитивность: чтобы отобразить $a_1,\ldots,a_n$ в $b_1,\ldots,b_n$, последовательно фиксируем все, кроме одной и двигаем свободную точку в b_i.

Откуда брать такую транзитивность? Как переместить a_1 в b_1? G-орбита совпадает с орбитой конечного числа H_i, т.е. мы можем, последовательно смещаясь по аддитивным группам, дойти до b_1.
Как теперь зафиксировать все остальные точки? Нужно сделать некую реплику

$$H_i = \{\exp t\delta\}$$

Хотим взять

$$\{\exp tf\delta\},\quad t\in\ker\delta$$

Проблема в том, что нам нужно, чтобы f обращалась в 0 в a_i, тогда они останутся на месте. С этим есть некоторая проблема, потому что даже орбиты общего положения разделяются рациональными инвариантами, а нам нужны регулярные.

МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ