中山大学本科生期末考试

考试科目:《高等数学一 (II)》(A 卷)

学年学期: **2022–2023 学年第 2 学期** 姓 名: ____________

学 院/系: 数学学院 学 号: ____________

考试方式: 闭卷 年级专业: ____________

考试时长: **120 分钟** 班 别: ____________

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第八条:“考试作弊者, 不授予学士学位.”

以下为试题区域, 共 13 道大题, 总分 100 分, 考生请在答题纸上作答

1. (8 分) 计算 $\int_0^{\sqrt{\pi}} \mathrm{d}y \int_y^{\sqrt{\pi}} \sin\left(x^2\right)\mathrm{d}x$ 的值

解析

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{\pi}} \mathrm{d}y \int_y^{\sqrt{\pi}} \sin\left(x^2\right)\mathrm{d}x &= \int_0^{\sqrt{\pi}} \mathrm{d}x \int_0^{x} \sin\left(x^2\right)\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{\sqrt{\pi}} \sin\left(x^2\right)x\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2}\cos x^2 \mid_0^{\sqrt{\pi}} \\ &= 1\end{aligned}$$

2. (8 分) 计算 $\oint_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s$ 的值，其中 $L: |x|+|y|=1$

解析

$$L_1: x+y=1, x>0, y>0$$

$\oint_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s = 2\oint_L x^2\mathrm{d}s$ (积分区域具有轮换对称性)

$= 2\times 4\times \int_{L_1} x^2\mathrm{d}s$ (积分区域关于x，y轴对称，被积函数关于x, y都是偶函数

$= 8\int_0^1 x^2\sqrt{2}\mathrm{d}x$

$= \frac{8\sqrt{2}}{3}$

3. (8 分) 证明 $\int_L (x+y+e^x)dx+(x+\cos y)dy$ 与路径 L 无关，计算 $z(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(e^x+x+y)dx+(x+\cos y)dy$ 的值

解析 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}=1$, 所以积分 $\int_L (x+e^x+y)\,dx+(x+\cos y)dy$ 与路径无关. 取路径 $O(0,0)\to A(x,0)\to B(x,y)$, 则

$$u(x,y)=\int_0^x (x+e^x)\,dx+\int_0^y (x+\cos y)dy=\frac{1}{2}x^2+e^x-1+xy+\sin y.$$

4. (8 分) 计算曲面积分 $I=\oiint\limits_S x^2\sin y\,dydz+y^2e^z dzdx+z^3dxdy$, 其中 S 为圆锥体 $x^2+y^2\le z^2(0\le z\le 1)$ 的全表面的外侧.

解析 由高斯公式: $\oiint\limits_S x^2\sin y\,dydz+y^2e^z dzdx+z^3dxdy=\iiint\limits_\Omega\left(2x\sin y+2ye^z+3z^2\right)dxdydz$

由区域的对称性得: $\iiint\limits_\Omega 2x\sin y\,dxdydz=\iiint\limits_\Omega 2ye^z dxdydz=0$

故 $\oiint\limits_S x^2\sin y\,dydz+y^2e^z dzdx+z^2dxdy=\iiint\limits_\Omega 3z^2dxdydz=\int_0^1 3z^2dz\iint\limits_{x^2+y^2\le z^2}1dxdy=\dfrac{3\pi}{5}$。

5. (8 分) 计算曲面积分 $I=\iint\limits_S (x+y+z)dS$, 其中 S 为上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$.

解析 由于上半球面 S 关于 $x=0$ 和 $y=0$ 对称, 所以由对称奇偶性, 得

$$\begin{aligned}
I&=\iint\limits_S (x+y+z)dS=0+0+\iint\limits_S z dS\\
&=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\cdot\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dx\,dy\\
&=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy\\
&=\iint\limits_{D_{xy}}a\,dx\,dy=\pi a^3
\end{aligned}$$

6. (8 分) 求微分方程 $xy''=y'+x\sin\dfrac{y'}{x}$ 的通解.

解析 此方程不显含 y, 所以令 $y'=p$, 则原方程化为

$$xp'=p+x\sin\frac{p}{x}$$

这是一个齐次方程，令 $\frac{p}{x}=u$，则上面方程化为

$$xu'=\sin u$$

从而求得通解 $\tan\frac{u}{2}=c_1x, c_1$ 为任意常数，既有通解

$$\frac{p}{x}=2\arctan c_1x$$

而上式即为

$$\frac{dy}{dx}=2x\arctan c_1x$$

积分，即得原方程的通解 $\begin{cases} y=x^2\arctan c_1x-\frac{x}{c_1}+\frac{1}{c_1^2}\arctan c_1x+c_2, & (c_1\neq 0) \\ y=c_2, & (c_1=0) \end{cases}$ 其中 c_2 为任意常数。

7. (8 分) 求 $x^3y'''+x^2y''-4xy'=3x^2$ 的通解

解析 作变量替换 $x=e^t$，方程换为 $\frac{d^3y}{dt^3}-2\frac{d^2y}{dt^2}-3\frac{dy}{dt}=3e^{2t}$，

对应的齐次方程 $\frac{d^3y}{dt^3}-2\frac{d^2y}{dt^2}-3\frac{dy}{dt}=0$，

其特征方程为 $r^3-2r^2-3r=0$。其特征根为 $0,-1,3$，

所以齐次方程的通解为

$$y=C_1+C_2e^{-t}+C_3e^{3t}=C_1+\frac{C_2}{x}+C_3x^3$$

设特解为为 $y^*=be^{2t}=bx^2$，代入原方程得 $y=-\frac{x^2}{2}$，

因此方程得通解为 $y=C_1+C_2\frac{1}{x}+C_3x^3-\frac{1}{2}x^2$

8. (8 分) 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ 的敛散性，并指明其为绝对收敛还是条件收敛

解析

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}=\frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{n+1}{n}\ln n}}=0$$

$\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ 单调递减

根据莱布尼兹判别法 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ 收敛

$$\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^{1+\frac{1}{n}}}\right|=\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}}{\frac{1}{n}}=1$$

根据极限形式的比较判别法，$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^{1+\frac{1}{n}}}\right|$ 发散，所以原级数条件收敛

9. (8 分) 函数项级数: $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{x}{3^n}$, 证明:

(1) (4 分) 在任意闭区间 $[-M, M]$ (M 为大于 0 的给定的常数) 上一致收敛;

(2) (4 分) 在 $(-\infty, \infty)$ 不一致收敛。

(1) **解析** 当 $x \in [-M, M]$ 时，$\left|2^n \sin\frac{x}{3^n}\right| \le \left|2^n \cdot \frac{x}{3^n}\right| \le M\left(\frac{2}{3}\right)^n$

根据 M 判别法，级数在 $[-M, M]$ 上一致收敛。

(2) **解析** 取 $x_n = 3^n \to +\infty$

$$0 \le |u_n| = \left|2^n \sin\frac{x}{3^n}\right| \le \left|\frac{2^n}{3^n}x\right| \to 0$$

$$\left|u_n(x_n) - 0\right| = \left|2^n \sin\frac{3^n}{3^n}\right| = 2^n \sin 1 \to +\infty$$

$$u_n(x) \nRightarrow 0$$

所以级数在 $(-\infty, +\infty)$ 上不一致收敛。

10. (8 分) 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n}(x+1)^n$ 的收敛域及和函数

解析 $\rho = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3^n}{n}} = 3, R = \frac{1}{3}.$

当 $x = -\frac{2}{3}, \because \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，所以原级数发散;

当 $x = -\frac{4}{3}$, 交错 p-级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ 收敛, 所以原级数收敛.

故原级数的收敛域是 $\left[-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

当 $x \in \left(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ 时,

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 3^n(x+1)^{n-1} = -\frac{3}{2+3x},$$

$$S(x) = \int_{-1}^{x}\frac{3}{1-(3(x+1))}dx = -\ln(-2-3x),$$

最后因为和函数在收敛域中连续, 所以当 $x \in \left[-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ 时，$S(x) = -\ln(-2-3x)$

11. (6 分) 判断 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 在 $t \in [0, +\infty)$ 上是否一致收敛

解析 这里被积函数虽然在 $x = 0$ 处无定义, 但对任意 $t \in [0, +\infty)$,

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{\mathrm{e}^{-tx}\sin x}{x} = 1,$$

即 $x=0$ 是被积函数的第一类间断点. 因而函数在任意区间 $[0,A]$ 上可积, $x=0$ 不是瑕点.
令 $f(x,t)=\dfrac{\sin x}{x}, g(x,t)=\mathrm{e}^{-tx}$. 显然 $g(x,t)$ 关于 x 是单调的,
且 $|g(x,t)|\leqslant 1$, 当 $0\leqslant x<+\infty, 0\leqslant t<+\infty$ 时, 即 $g(x,t)$ 对 t 一致有界; 又积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}$ 意味着 $\int_0^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}x$ 的一致收敛性. 由阿贝尔判别法, 即得所论无穷积分在区间 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

12. (6 分) 判断积分 $\int_0^1 \dfrac{1-\cos x}{x^{5/2}}dx$ 的敛散性.

解析 0 为瑕点。由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^{5/2}}/\dfrac{1}{x^{1/2}}=\dfrac{1}{2}$, 且 $\int_0^1\dfrac{1}{x^{1/2}}dx$ 收敛,
故由比较判别法知, $\int_0^1\dfrac{1-\cos x}{x^{5/2}}dx$ 收敛。

13. (10 分) 设函数 $f(x)$ 以 4 为周期并且满足 $f(x)=\begin{cases}0 & ,x\in[-2,0)\\ k & ,x\in[0,2)\end{cases}$, 求出 $f(x)$ 的傅里叶级数及其和函数

解析 $l=2$, 满足狄氏充分条件.

$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}0dx+\frac{1}{2}\int_0^2 kdx=k,$$
$$a_n=\frac{1}{2}\int_0^2 k\cdot\cos\frac{n\pi}{2}xdx=0(n=1,2,\cdots),$$
$$b_n=\frac{1}{2}\int_0^2 k\cdot\sin\frac{n\pi}{2}xdx=\frac{k}{n\pi}(1-\cos n\pi)=\begin{cases}\dfrac{2k}{n\pi}, & n=1,3,5,\cdots,\\ 0, & n=2,4,6,\cdots\end{cases},$$

所以

$$f(x)=\frac{k}{2}+\frac{2k}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2}+\frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{2}+\cdots\right)(-\infty<x<+\infty;x\neq 0,\pm 2,\pm 4,\cdots)$$