中山大学本科生期末考试

考试科目:《高等数学一（II)》(A 卷)

学年学期:	2021–2022 学年第 2 学期	姓　　名:	
学　院/系:	数学学院	学　　号:	
考试方式:	闭卷	年级专业:	
考试时长:	120 分钟	班　　别:	

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第八条:“考试作弊者,不授予学士学位.”

以下为试题区域, 共 11 道大题, 总分 100 分, 考生请在答题纸上作答

1. 求多元函数 $f(x,y)=x\times e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值。

解析 $f(x,y)=xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$, 先求函数的驻点: 令

$$\begin{cases} f_x'(x,y)=\left(1-x^2\right)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=0 \\ f_y'(x,y)=-xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=0 \end{cases}$$

解得驻点为 $(1,0),(-1,0)$. 又

$$f''_{xx}=x\left(x^2-3\right)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$$f''_{xy}=-y\left(1-x^2\right)e^{-\frac{x^2+v^2}{2}}$$

$$f''_{yy}=-x\left(1-y^2\right)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

对点 $(1,0)$, 有 $A_1=f''_{xx}(1,0)=-2e^{-\frac{1}{2}}, B_1=f''_{xy}(1,0)=0, C_1=f''_{yy}(1,0)=-e^{-\frac{1}{2}}$

所以, $A_1C_1-B_1^2>0, A_1<0$,

故 $f(x,y)$ 在点 $(1,0)$ 处取得极大值 $f(1,0)=e^{\frac{1}{2}}$.

对点 $(-1,0)$, 有 $A_2=f''_{xx}(-1,0)=2e^{-\frac{1}{2}}, B_2=f''_{xy}(-1,0)=0, C_2=f''_{yy}(-1,0)=e^{-\frac{1}{2}}$.

所以, $A_2C_2-B_2^2>0, A_2>0$,

故 $f(x,y)$ 在点 $(1,0)$ 处取得极小值 $f(-1,0)=-e^{\frac{1}{2}}$

2. 求 $I=\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}(x^2+y^2)dy$ 的值。

解析

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \left(x^2+y^2\right) \mathrm{d}y \\
=&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^1 r^2 \cdot r\mathrm{d}r \\
=&\frac{\pi}{2} \int_0^1 r^3 \mathrm{d}r \\
=&\frac{\pi}{2} \times \left.\frac{1}{4} r^4\right|_0^1 \\
=&\frac{\pi}{2} \times \frac{\pi}{4} \\
=&\frac{\pi}{8}.
\end{aligned}
$$

3. 求第二型曲面积分 $\iint_S (x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + z\mathrm{d}z\mathrm{d}x$, 其中 S 为抛物面 $z=x^2+2y^2$在$z\leq 1$ 部分的下侧。

解析

$$
\begin{aligned}
&\iint_s (x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + z\mathrm{d}z\mathrm{d}x \\
=&-\iint\limits_{x^2+2y^2\leq 1} (x+z, z, 0)(-2x, -4y, 1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
=&-\iint\limits_{x^2+2y^2\leq 1} \left(x+x^2+2y^2, x^2+2y^2, 0\right)(-2x, -4y, 1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
=&\iint\limits_{x^2+2y^2\leq 1} \left(2x^2+2x^3+4xy^2+4x^2y+8y^3\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
=&\iint\limits_{x^2+2y^2\leq 1} 2x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&\text{设} x = r\cos\theta,\quad y=\frac{\sqrt{2}}{2} r\sin\theta \\
=&\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\mathrm{d}\theta \int_0^1 r^3\mathrm{d}r \\
=&\sqrt{2}\times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\mathrm{d}\theta \\
=&\frac{\sqrt{2}\pi}{4}
\end{aligned}
$$

4. 求微分方程 $x\mathrm{d}y+\left(y+x^2\right)\cdot\mathrm{d}x=0$ 的通解。

解析 **解法一**

$$
\begin{aligned}
& x\mathrm{d}y+\left(y+x^2\right)\mathrm{d}x=0 \\
& \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{y+x^2}{x} \\
& y'+\frac{y}{x}=-x \\
& \text{先解}y'=-\frac{y}{x} \\
& \frac{\mathrm{d}y}{y}=-\frac{\mathrm{d}x}{x} \\
& \ln|y|=-\ln|x|+\ln C \\
& |y|=\frac{C}{|x|} \\
& y=\frac{C}{x} \\
& \text{设非齐次方程解为}\frac{C(x)}{x} \\
& \frac{C'(x)x-C(x)}{x^2}+\frac{C(x)}{x^2}=-x \\
& C'(x)=-x^2 \\
& C(x)=-\frac{x^3}{3}+C \\
& y=-\frac{\frac{x^3}{3}+C}{x} \\
& \ =-\frac{x^2}{3}+\frac{C}{x}
\end{aligned}
$$

解法二 因为

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=1$$

所以原方程为全微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)$$

对 y 积分有

$$u(x,y)=xy+\phi(x)$$

对 x 求导有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y+\phi'(x)=P=y+x^2$$

所以

$$\phi(x)=\frac{x^3}{3}$$

$$u(x,y)=xy+\frac{x^3}{3}$$

通积分为

$$xy+\frac{x^3}{3}=C$$

5. 求微分方程 $y''=y'\cdot y$ 的通解。

解析

$$y''=y'\cdot y$$

$$\text{设}y'=p \quad y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}p$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}p=py$$

$$\text{当}p=0\text{时}y'=0,\ \ y=C$$

$$\text{当}p\neq 0\text{时},\ \mathrm{d}p=y\mathrm{d}y$$

$$p+C_1=\frac{y^2}{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y^2}{2}+C_1$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y^2+C_1}{2}$$

$$\frac{2\mathrm{d}y}{y^2+C_1}=\mathrm{d}x$$

$$\frac{\frac{2}{\sqrt{C_1}}\mathrm{d}\left(\frac{y}{\sqrt{C_1}}\right)}{\left(\frac{y}{\sqrt{C_1}}\right)^2+1}=x+C_2$$

$$\frac{2}{\sqrt{C_1}}\arctan\left(\frac{y}{\sqrt{C_1}}\right)=x+C_2$$

$$2C_1\arctan\left(C_1y\right)=x+C_2$$

6. 求微分方程 $y''+y=e^{3x}(x+2)$ 的通解。

解析

$\lambda^2+1=0$

$\lambda=\pm i$

齐次方程的通解为$y=C_1\cos(x)+C_2\sin(x)$

设$y''+y=e^{3x}x$ 特解为$y^{\#}$

设$y^{\#}=(ax+b)e^{3x}$

$y^{\#\prime}=ae^{3x}+3(ax+b)e^{3x}$

$y^{\#\prime\prime}=6ae^{3x}+9(ax+b)\mathrm{e}^{3x}$

$$\begin{cases}6a+10b=2\\10a=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}a=\dfrac{1}{10}\\b=\dfrac{7}{50}\end{cases}$$

$$y^{\#}=\left(\frac{x}{10}+\frac{7}{50}\right)e^{3x}$$

$$y=\frac{7\,\mathrm{e}^{3x}}{50}+\frac{x\,\mathrm{e}^{3x}}{10}+C_1\cos(x)+C_2\sin(x)$$

7. 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1+y^2}{(1+x^2)\,xy}$ 的通解。

解析 原方程变形为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{(1+x^2)\,x}\cdot\frac{1+y^2}{y},$$

分离变量,得

$$\frac{y\,\mathrm{d}y}{1+y^2}=\frac{\mathrm{d}x}{x\,(1+x^2)}$$

两端分别积分

$$\int\frac{y\,\mathrm{d}y}{1+y^2}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x\,(1+x^2)},$$

因右端的被积函数可写成

$$\frac{1}{x\,(1+x^2)}=\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2},$$

故得

$$\frac{1}{2}\ln\left(1+y^2\right)=\ln x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+\frac{1}{2}\ln C$$

即

$$\ln\left[\left(1+y^2\right)\left(1+x^2\right)\right]=2\ln x+\ln C.$$

所以原方程的通解为

$$\left(1+y^2\right)\left(1+x^2\right)=Cx^2.$$

8. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ 的收敛域与和函数。

解析 由 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{n+2}\cdot\frac{n+1}{x^n}\right|=|x|$, 可得收敛区间为 $(-1,1)$.
当 $x=1$ 时, 原级数发散; 当 $x=-1$ 时, 原级数收敛, 于是收敛域为 $[-1,1)$.
设 $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$, 则 $xs(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$, 两边同时求导, 有

$$[xs(x)]'=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x},$$

两边同时积分, 有

$$xs(x)=\int_0^x\frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x=-\ln(1-x),x\in[-1,1).$$

故当 $x\neq 0$ 时, $s(x)=-\frac{1}{x}\ln(1-x)$; 当 $x=0$ 时, 由 $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$, 得 $s(0)=1$, 于是

$$s(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x}\ln(1-x), & x\in[-1,0)\cup(0,1),\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

9. 求函数 $y=\frac{x}{4+x^2}$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数，并指出收敛域。

解析

$$\begin{aligned}
f(x)&=\frac{x}{4+x^2}\\
\int_0^x f(x)\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int_0^x\frac{1}{4+x^2}\mathrm{d}\left(4+x^2\right)\\
&=F(x)-F(0)\\
&=\frac{1}{2}\ln\left(4+x^2\right)-\frac{1}{2}\ln 4\\
&=\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{x^2}{4}\right)\\
&=\frac{1}{2}\ln\left[1+\left(\frac{x}{2}\right)^2\right]\\
&=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^4+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^6\cdots+(-1)^{n-1}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{n}+\cdots\right]\\
f(x)&=\frac{1}{2}\left[\frac{2x}{4}-\frac{4x^3}{2^5}+\frac{6x^3}{3\times 2^6}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{2n\times x^{2n-1}}{n\times 4^n}+\cdots\right]\\
&=\frac{x}{4}-\frac{x^3}{16}+\frac{x^5}{64}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{4^n}+\cdots\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{4^n}\quad \text{收敛域为}(-2,2)
\end{aligned}$$

10. 判断下列数项级数的敛散性

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \sin\left(\frac{\pi}{4^n}\right)$

(2) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(2n)}{\ln n}$

(1) **解析** $3^n \sin\left(\frac{\pi}{4^n}\right) \leq \pi\left(\frac{3}{4}\right)^n$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n$ 收敛，

由比较判别法，$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \sin\left(\frac{\pi}{4^n}\right)$ 收敛。

(2) **解析** $\left|\sum_{n=2}^{n} \cos(2n)\right| \leq \frac{1}{|\sin 1|}$

$\left\{\frac{1}{\ln n}\right\}$ 单调递减

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0$

由狄利克雷判别法，该级数收敛。

11. 考虑函数项级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2\sqrt{x}}$，证明：

(1) 级数在 $(0,1)$ 上收敛。

(2) 级数在 $(0,1)$ 上不一致收敛。

(3) 级数的和函数 $S(x)$ 在 $(0,1)$ 上连续。

(1) **解析** $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2\sqrt{x}}} = \sqrt{x} \in (0,1)$

$\because \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛

$\therefore \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2\sqrt{x}}$ 收敛.

(2) **解析** 对于函数序列 $f_n(x) = \frac{1}{n^2\sqrt{x}}$

$\left|f_n(x) - f(x)\right| = \frac{1}{n^2\sqrt{x}}$

取 $x_n = \frac{1}{n^4}$

$\left|f_n\left(x_n\right) - f\left(x_n\right)\right| = \frac{1}{n^2\sqrt{\frac{1}{n^4}}} = 1 \neq 0$

$\therefore$ 函数序列 $\left\{f_n(x)\right\}$ 不一致收敛于 0。

$\therefore$ 函数项级数在 $(0,1)$ 上不一致收敛。

(3) **解析** 任取 $a \in (0,1)$, 对 $x \in (a,1)$

$\left|\dfrac{1}{n^2\sqrt{x}}\right| < \dfrac{1}{n^2\sqrt{a}}$, 而 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n^2\sqrt{a}}$ 收敛。

由强级数判别法，函数项级数在 $(a,1)$ 上一致收敛。

又 $\because f_n(x)$ 在 $(a,1)$ 上连续.

级数的和函数 $S(x)$ 在 $(a,1)$ 上连续。

又 $\because a$ 是任取的,

$\therefore$ 级数的和函数 $S(x)$ 在 $(0,1)$ 上连续。