# 中山大学本科生期末考试

## 考试科目:《高等数学一（II)》(A 卷)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 学年学期: | 2020–2021 学年第 2 学期 | 姓　　名: | |
| 学　院/系: | 数学学院 | 学　　号: | |
| 考试方式: | 闭卷 | 年级专业: | |
| 考试时长: | 120 分钟 | 班　　别: | |

**警示**《中山大学授予学士学位工作细则》第八条:"考试作弊者,不授予学士学位."

以下为试题区域,共 12 道大题,总分 100 分,考生请在答题纸上作答

1. (12 分) 确定实数 $\alpha$ 的范围, 使函数 $f(x,y)=\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)^\alpha\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2\neq 0\end{cases}$, 在 $(0,0)$ 处可微

**解析**　偏导数存在是可微的必要条件,

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{2\alpha}\sin\frac{1}{x^2}}{x}=\lim_{x\to 0}x^{2\alpha-1}\sin\frac{1}{x^2}$$

当 $2\alpha-1>0$ 时，极限等于 0，即 $f_x'(0,0)=0$ 同理 $f_y'(0,0)=0$

当 $2\alpha-1\leq 0$ 是没有极限。

即如果函数可微，则 $\alpha>\dfrac{1}{2}$。

反之，如果 $\alpha>\dfrac{1}{2}$，则

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,0)-\left[f_x'(0,0)x+f_y'(0,0)y\right]}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ =&\lim_{x\to 0}\frac{\left(x^2+y^2\right)^\alpha\sin\frac{1}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ =&\lim_{x\to 0}\rho^{2\alpha-1}\sin\frac{1}{\rho^2}\\ =&0\end{aligned}$$

函数可微。

因此 $\alpha>\dfrac{1}{2}$ 是函数可微做的充分必要条件。

2. (12 分) 计算曲线积分 $\oint_L \left(xy^2 - \sin y\right) \mathrm{d}y - \left(\cos x + x^2 y\right) \mathrm{d}x$, 其中 $L$ 为圆周 $x^2+y^2=4$, 积分方向为沿 $L$ 逆时针方向

**解析**

$$
\begin{aligned}
& P = -\cos x - x^2 y,\quad Q = xy^2 - \sin y \\
& \frac{\partial P}{\partial y} = -x^2,\quad \frac{\partial Q}{\partial x} = y^2 \\
& \oint_L \left(xy^2 - \sin y\right) \mathrm{d}y - \left(\cos x + x^2 y\right) \mathrm{d}x \\
= & \iint_D \left(y^2 + x^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
= & \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^2 r^2 \cdot r\mathrm{d}r \\
= & \int_0^{2\pi} 4d\theta \\
= & 8\pi
\end{aligned}
$$



3. (12 分) 设三角形的周长为定值 $2p$, 求三边长使绕一边旋转所得到的旋转体体积最大。

**解析** 设三角形底边上的高为 $x$, 垂足分底边的长度为 $y, z$. 设三角形饶底边旋转, 旋转体体积为

$$V = \frac{\pi}{3}x^2(y+z), y+z+\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+z^2}=2p, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0$$

$V$ 在有界闭集上取最大值。

$$L(x,y,z,\lambda) = x^2(y+z) + \lambda\left(y+z+\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+z^2}-2p\right),$$

$$2x(y+z)+\lambda\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}\right)=0, \tag{1}$$

$$x^2+\lambda\left(1+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=0, \tag{2}$$

$$x^2+\lambda\left(1+\frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}}\right)=0 \tag{3}$$

$$y+z+\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+z^2}-2p \tag{4}$$

$$(2)-(3) \Rightarrow \lambda\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}}\right)=0$$

若$\lambda=0$,将有$x=0$,不可能。故$\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\dfrac{z}{\sqrt{x^2+z^2}}=0.$

由于$y>0, z>0$,易得$y=z$.

$$2xy+\frac{\lambda x}{\sqrt{x^2+y^2}}=0,$$

$$
\begin{aligned}
&2y+\frac{\lambda}{\sqrt{x^2+y^2}}=0,\\
&x^2+\lambda\left(1+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=0,\\
&y+\sqrt{x^2+y^2}=p.
\end{aligned}
$$

解之得 $y=z=\frac{p}{4}$, 底边长 $=\frac{p}{2}$，两腰长 $=\frac{1}{2}\left(2p-\frac{p}{2}\right)=\frac{3p}{4}$.

4. (8 分) 求微分方程 $y\ln y\mathrm{d}x+(x-\ln y)\mathrm{d}y=0$ 的通解。

**解析**

$$
\begin{aligned}
&y\ln y\mathrm{d}x+(x-\ln y)\mathrm{d}y=0\\
&\ln y\mathrm{d}x+\frac{x}{y}\mathrm{d}y-\ln y\times\frac{1}{y}\mathrm{d}y=0\\
&\ln y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}\ln y-\ln y\mathrm{d}\ln y=0\\
&\mathrm{d}(x\ln x)-\mathrm{d}\frac{(\ln y)^2}{2}=0\\
&\text{通解为}x\ln y-\frac{(\ln y)^2}{2}=C
\end{aligned}
$$

5. (8 分) 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^3+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 的通解。

**解析**

$$
\begin{aligned}
&z=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\frac{z\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\\
&\frac{z\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}=z^3+z,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}=z^2+1\\
&\frac{1}{z^2+1}\mathrm{d}z=\mathrm{d}y\\
&\arctan z=y+C_1\\
&z=tan(y+C_1),\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\tan\left(y+C_1\right),\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}y}{\tan\left(y+C_1\right)}\\
&x=\ln\sin\left(y+C_1\right)+C_2\\
&y=\arcsin e^{x-C_2}+C_1
\end{aligned}
$$

6. (8 分) 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+y=e^x+\cos x$ 的通解。

**解析**

$$
\begin{aligned}
&\text{齐次方程的通解为}Y(x)=C_1\cos x+C_2\sin x\\
&\text{分别求}y''+y=e^x\text{ 与}y''+y=\cos x\text{的特解}y_1^*,y_2^*
\end{aligned}
$$

$y_1^* = \frac{1}{2}e^x, y_2^* = \frac{1}{2}x\sin x$

原方程的通解为$y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}x\sin x$

7. (6 分) 判断级数 $\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{4}-1} - \frac{1}{\sqrt{4}+1} + \cdots$ 是收敛还是发散的。

**解析**

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{4}-1} - \frac{1}{\sqrt{4+1}} + \cdots \\
&= \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1}\right) \\
&= \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}
\end{aligned}$$

$\because$ 是调和级数

$\therefore$ 原级数发散

8. (6 分) 根据 $a(a>0)$ 的值讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right)^a$ 是收敛还是发散的。

**解析**

$$a_n = \left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right)^a, \quad b_n = \left(\frac{1}{n^3}\right)^a.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\left[n^3\left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right)\right]^a$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[n^3 \times \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^3}{3!}\right]^a = \left(\frac{1}{6}\right)^a$$

$a_n, b_n$同敛散性

当$a > \frac{1}{3}$时候$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛 $\Rightarrow a_n = \left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right)^a$ 收敛

当$a \le \frac{1}{3}$时候$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$发散 $\Rightarrow a_n = \left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right)^a$ 发散

9. (8 分) 函数项级数: $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{x}{3^n}$, 证明:

(1) (4 分) 在任意闭区间 $[-M, M]$ ( $M$ 为大于 0 的给定的常数) 上一致收敛;

(2) (4 分) 在 $(-\infty, \infty)$ 不一致收敛。

(1) **解析** 当 $x \in [-M, M]$ 时，$\left|2^n \sin \frac{x}{3^n}\right| \le \left|2^n \cdot \frac{x}{3^n}\right| \le M\left(\frac{2}{3}\right)^n$
根据 M 判别法，级数在 $[-M, M]$ 上一致收敛。

(2) **解析** 取 $x_n = 3^n \to +\infty$

$$0 \le |u_n| = \left|2^n \sin \frac{x}{3^n}\right| \le \left|\frac{2^n}{3^n} x\right| \to 0$$

$$\left|u_n(x_n) - 0\right| = \left|2^n \sin \frac{3^n}{3^n}\right| = 2^n \sin 1 \to +\infty$$

$$u_n(x) \not\rightrightarrows 0$$

所以级数在 $(-\infty, +\infty)$ 上不一致收敛。

10. (6 分) 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^{4n}$ 的收敛半径。

**解析**

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{[2(n+1)]!}{[(n+1)!]^2} x^{2(n+1)}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2} x^{2n}} \right| = 4|x|^4$$

当 $4|x|^4 < 1$ 即 $x^2 < \frac{1}{2}$ 时级数收敛;
当 $4|x|^4 > 1$ 即 $x^2 > \frac{1}{2}$ 时级数发散;
所以收敛半径 $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$。

11. (6 分) 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$ 的和函数。

**解析**

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}, x \in (-1, 1)$$

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{4n} = \frac{x^4}{1-x^4}$$

$$\begin{aligned}
\text{又} S(0) = 0, S(x) &= \int_0^x \frac{x^4}{1-x^4} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^x \left(\frac{1}{1-x^4} - 1\right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{1+x^2}\right) \mathrm{d}x - x \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_0^x \frac{1}{1-x^2} \mathrm{d}x + \int_0^x \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x\right] - x \\
&= \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \arctan x - x
\end{aligned}$$

12. (8 分) 求函数 $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ 在 $x=0$ 处的幂级数展开式。

**解析**

$$\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$$

令 $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

则 $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$$=\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=1-\frac{x^2}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6+\cdots+(-1)^n\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}x^{2n}+\cdots(|x|<1)$$

从而 $f(x)=\displaystyle\int_0^x f'(x)\mathrm{d}x$

$$=x-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}x^7+\cdots+(-1)^n\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

所以 $\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

$$=-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$$

$$=-x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}x^7-\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$